

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos

Pedro Infante Moreira

Tomo 2



ESPOCH
2016

**Electromagnetismo básico
e introducción a los circuitos eléctricos**

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos

Tomo 2

Pedro Infante Moreira



**Electromagnetismo básico
e introducción a los circuitos eléctricos**

© 2015 Pedro Infante Moreira

© 2015 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 1/2

Instituto de investigación

Riobamba, Ecuador

Teléfono: 593 (03) 2 998-200

Código Postal: EC060155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego
(*peer review*).

Corrección y diseño:

La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio, sin la previa
autorización por escrito de los propietarios del Copyright.

CDU: 537 + 621.3

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos. Tomo 2.

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Instituto de Investigaciones; 2015

101 p. vol: 17 x 24 cm

ISBN: 978-9942-14-228-3

1. Física
2. Circuitos eléctricos
3. Electricidad
4. Electromagnetismo

CONTENIDO TOMO 2

Capítulo 3. Ley de Gauss	9
3.1 Flujo eléctrico.....	9
3.2 Flujo que emana una carga puntual.....	10
3.3. Ley de Gauss	12
3.3.1 Ley de Gauss para una distribución lineal de cargas ..	13
3.3.2 Ley de Gauss para una distribución superficial de cargas ..	14
3.3.3 Ley de Gauss para una distribución volumétrica de cargas..	17
3.4 El campo eléctrico en presencia de un conductor.....	18
3.5 Ejercicios de aplicación	20
Capítulo 4. Potencial eléctrico	39
4.1 Trabajo	39
4.2 Energía potencial	43
4.3 Diferencia de potencial.....	43
4.3.1 Diferencia de potencial entre dos puntos	45
4.4 Potencial debido a varias cargas puntuales.....	47
4.5 Relación entre potencial y el campo eléctrico	48
4.6 Cálculo de campos eléctricos mediante el potencial	50
4.7 Energía en el campo electrostático	51
4.8 El electrón-voltio	54
4.9 Ejercicios de aplicación	55
Capítulo 5. Capacitancia y dieléctricos	71
5.1 El condensador.....	71
5.2 Capacitancia o capacidad.....	71
5.2.1 Capacidad del condensador de placas planas.....	72
5.2.2 Capacidad de un condensador esférico.....	73
5.2.3 Capacidades entre cilindros coaxiales	75
5.3 Asociación de condensadores: serie, paralelo, $\Delta \rightarrow Y$	77
5.4 Energía almacenada en los condensadores	82

5.4.1 Energía que almacena un condensador de placas paralelas en su campo eléctrico	83
5.5 Dieléctricos	84
5.6 Influencia del dieléctrico en un condensador.....	85
5.7 Ley de Gauss en condensadores con dieléctricos.....	87
5.8 Energía almacenada en un medio dieléctrico	89
5.9 Ejercicios de aplicación	89

CAPÍTULO 3 LEY DE GAUSS

3.1 Flujo eléctrico

Se define el flujo eléctrico ϕ_E como el número de líneas de campo eléctrico que atraviesa una superficie en forma perpendicular. Esta superficie puede ser cerrada o abierta (Resnick y Halliday, 1977, p. 851).

En la figura 3.1, procedemos a calcular el flujo eléctrico de la siguiente manera: la superficie real es el área de dimensiones L por L . Esto es $A = L^2$; pero, en esta superficie, las líneas de campo eléctrico no lo atraviesan en forma perpendicular, con lo que no se cumple la definición de ϕ_E . Para cumplir con esta definición, las líneas de campo eléctrico atraviesan en forma perpendicular en la componente de la superficie, esto es, $L \cos \theta$. Utilizando estos criterios, realizamos lo siguiente:

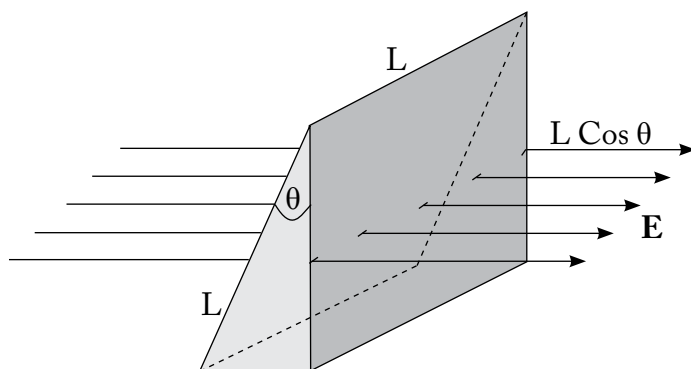


Figura. 3.1. Superficie hipotética colocada dentro de un campo eléctrico.

de líneas = (E) (área perpendicular)

$$\phi_E = (E) (L \cos \theta)$$

$$\phi_E = E L^2 \cos \theta$$

$S = A = L^2$, siendo S la superficie que atraviesa el campo eléctrico.

$$\begin{aligned}\phi_E &= EA \cos \theta \\ \phi_E &= ES \cos \theta\end{aligned}\tag{3-1}$$

Tomando en cuenta la definición del producto escalar, la ecuación (3-1) nos queda de la siguiente forma: $\phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}$

Si consideramos un diferencial de área (ds), entonces existirá un diferencial de flujo eléctrico ($d\phi_E$); esto es:

$$\begin{aligned}d\phi_E &= E ds \cos \theta \\ \phi_E &= \int E ds \cos \theta \\ \phi_E &= \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}\end{aligned}$$

Cuando la superficie es cerrada, la fórmula del flujo eléctrico queda representada en la ecuación (3-2).

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}\tag{3-2}$$

3.2 Flujo que emana una carga puntual

Aun cuando la Ley de Gauss es válida para una superficie cualquiera, la información puede obtenerse más fácilmente de una superficie esférica de radio r con centro en la carga q , tal como lo muestra la figura 3.2. La ventaja de esta superficie es que, por simetría, \mathbf{E} debe ser normal a ella y debe tener la misma magnitud en todos los puntos de la superficie.

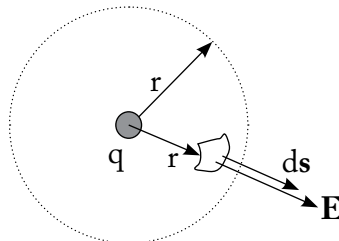


Figura. 3.2. Una superficie gaussiana esférica de radio r , que rodea una carga puntual q^+

En la figura 3.2, utilizamos la ecuación (3-2) para calcular el flujo eléctrico. Este debe cumplir con los siguientes criterios: escogemos una superficie cerrada de forma esférica de radio r , que encierre la carga q , la misma que se encuentra en el centro, lo cual nos garantiza que las líneas de campo eléctrico lo atraviesan en forma perpendicular y radial. En la esfera, escogemos un diferencial de superficie ds y, sobre esta, dibujamos los dos vectores \mathbf{E} y $d\mathbf{s}$. La carga q tiene signo positivo y sobre el diferencial de superficie asumimos una carga de prueba q_0^+ , razón por la cual existe una fuerza de repulsión; y el vector \mathbf{E} lo dibujamos en forma perpendicular y radial de la superficie hacia afuera. El vector normal $d\mathbf{s}$ lo dibujamos en forma perpendicular de la superficie hacia afuera. Para este caso, el vector campo eléctrico \mathbf{E} y el vector $d\mathbf{s}$, en cualquier punto de la superficie gaussiana, están dirigidos radialmente hacia afuera; el ángulo entre ellos es cero. El flujo eléctrico para esta carga puntual es: la integral cerrada de superficie de la esfera se convierte en una integral abierta. Esto es:

$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \\ \phi_E &= \int E \, ds \, \cos \theta = \int E \, ds \, \cos 0^\circ = \int E \, ds \\ \phi_E &= E \int ds = ES\end{aligned}$$

La superficie de la esfera es $S = 4\pi r^2$ y el campo eléctrico E producido por una carga punto q a una distancia r es:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$\phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \text{es el número de línea de campo } E \text{ que está saliendo de } q.$$

Si la carga es negativa (figura 3.3), existe una fuerza de repulsión y el vector campo eléctrico \mathbf{E} se dibuja en forma radial y perpendicular del diferencial de superficie hacia adentro; mientras que el vector normal $d\mathbf{s}$ siempre se dibuja en forma perpendicular de la superficie hacia afuera. Los vectores \mathbf{E} y $d\mathbf{s}$ forman un ángulo de 180° .

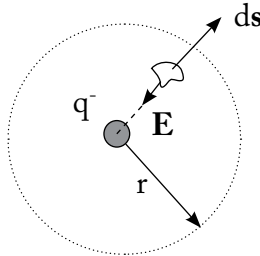


Figura 3.3. Superficie gaussiana esférica de radio r , que rodea una carga punto q negativa.

$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int E \, ds \cos \theta = \int E \, ds \cos 180^\circ \\ \phi_E &= -\int E \, ds = -E \int ds = -E s\end{aligned}$$

$$\phi_E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\phi_E = -\frac{q}{\epsilon_0}, \quad \text{es el número de líneas de campo eléctrico que están entrando a } q.$$

3.3 Ley de Gauss

La ley de Gauss que se aplica a cualquier superficie hipotética cerrada (llamada superficie gaussiana), establece una relación entre ϕ_E para la superficie y la carga neta q encerrada por la superficie.

Si tenemos varias cargas encerradas por la superficie gaussiana, la carga neta (Q_n) es:

$$Q_n = q_1 + q_2 + \dots + q_n$$

$$Q_n = \sum_{i=1}^N q_i$$

Entonces, el flujo eléctrico producido por varias cargas es:

$$\phi_E = \frac{Q_n}{\epsilon_0}, \quad \text{es el número de líneas que salen o entran a la carga } Q_n.$$

Por otra parte:

$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$, es el número de líneas que atraviesan una superficie cerrada.

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

Donde:

$$Q_n = \sum_{i=1}^N q_i, \quad \text{es la suma de todas las cargas encerradas por la superficie gaussiana.}$$

Entonces, la ecuación de la ley de Gauss es: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$.

3.3.1 Ley de Gauss para una distribución lineal de cargas

Cuando a lo largo de una barra se distribuyen cargas eléctricas (figura 3.4), se dice que existe una distribución lineal de cargas, dada por la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{Q_n}{l}$$

Siendo: λ = densidad lineal de cargas

Q_n = carga neta (total)

l = longitud de la barra donde se encuentran las cargas

Si la distribución de cargas es uniforme, el valor de λ es constante. Si tomamos un diferencial de longitud (dl), existirá un diferencial de cargas dQ_n ; esto es:

$$dQ_n = \lambda dl$$

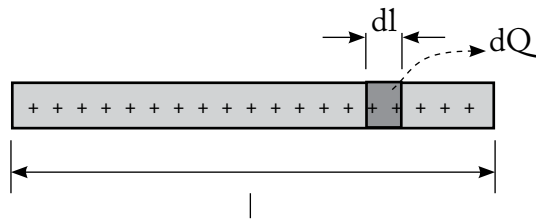


Figura 3.4. Cargas distribuidas linealmente sobre una barra

Integrando, tenemos:

$$Q_n = \int \lambda dl, \text{ carga neta para una distribución lineal de cargas.}$$

3.3.2 Ley de Gauss para una distribución superficial de cargas

Cuando sobre una superficie de un material se distribuyen cargas eléctricas (figura 3.5), se dice que existe una distribución superficial de cargas y viene dada por la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{Q_n}{S}$$

Siendo:

σ = densidad superficial de cargas

Q_n = carga neta (total)

S = superficie donde se encuentran las cargas

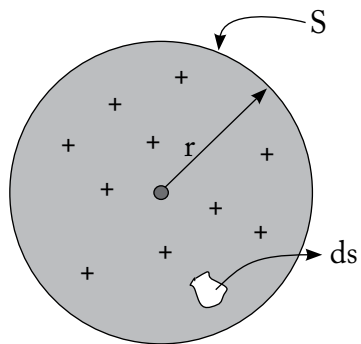


Figura 3.5. Cargas distribuidas en una superficie (superficie de un disco)

En un diferencial de superficie ds , existirá un diferencial de carga dQ_n ; esto es:

$$dQ_n = \sigma ds$$

Integrando, tenemos:

$$Q_n = \int \sigma ds, \quad \text{carga neta para una distribución superficial de cargas.}$$

3.3.3 Ley de Gauss para una distribución volumétrica de cargas

Cuando en un volumen se distribuyen cargas eléctricas (figura 3.6), se dice que existe una distribución volumétrica de cargas y viene dada por la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{Q_n}{V}$$

Siendo:

ρ = densidad volumétrica de cargas

Q_n = carga neta (total)

V = volumen del material

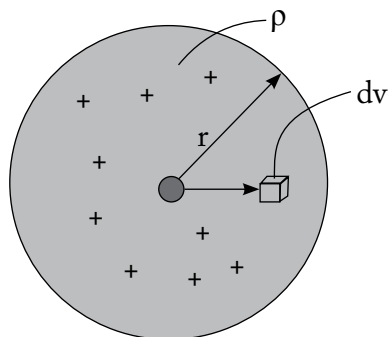


Figura 3.6. Cargas distribuidas en un volumen (volumen de una esfera)

En un diferencial de volumen (dv), existirá un diferencial de cargas dQ_n ; esto es:

$$dQ_n = \rho dv$$

Integrado

$$Q_n = \int \rho dv \quad \text{carga neta para una distribución volumétrica de cargas.}$$

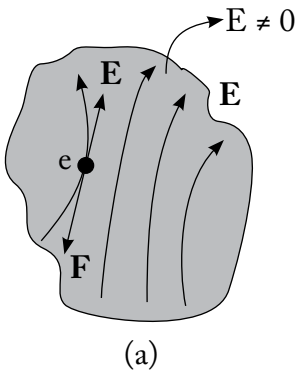
3.4 El campo eléctrico en presencia de un conductor

- a) El campo eléctrico E es igual a cero en todas partes dentro del conductor.
- b) No hay carga neta dentro del conductor.
- c) El campo eléctrico es, en todas partes, perpendicular a la superficie límite del conductor.
- d) La carga inducida por unidad de área (σ) en la superficie del conductor tiene relación con el campo eléctrico E , en la superficie, por medio de:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Propiedad a) Tomando en cuenta la figura 3.7 (a), el campo eléctrico interno es diferente de cero ($E \neq 0$).

En (b) y (c), $\Delta t = 10^{-14}$ seg es el tiempo que tardan en redistribuirse las cargas de material conductor, desde la condición inicial (b) hasta la condición final (c).



$$E = \frac{F}{q_0}, \quad E = \text{campo eléctrico externo}$$

$$eE = F, \quad e = \text{carga del electrón}$$

$$F = ma, \quad F = \text{fuerza del electrón}$$

$$a = \frac{F}{m}, \quad a = \text{aceleración}, \quad m = \text{masa del electrón}$$

Figura 3.7. (a) Material conductor en $t = 0$

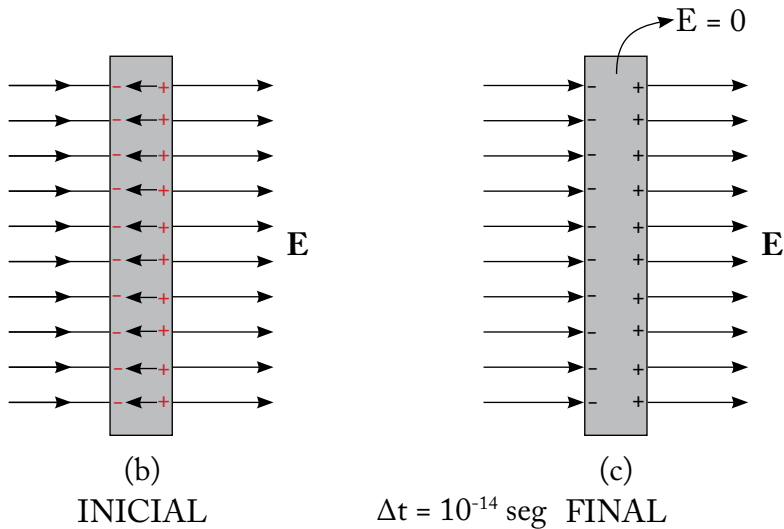


Figura 3.7. (b) material conductor en $0 < t < 10^{-14}$.
(c) Material conductor en $t > 10^{-14}$

Propiedad b) En la figura 3.8, el campo eléctrico E en el interior del material conductor es cero; esto es:

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_n$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$E = 0$$

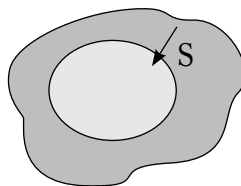


Figura 3.8. Material conductor

Propiedad c) En la figura 3.9, el campo eléctrico E_1 no debe existir, porque no es perpendicular a la superficie, ya que, si no es perpendicular, los electrones libres comenzarán a moverse y, por lo tanto, existe una aceleración.

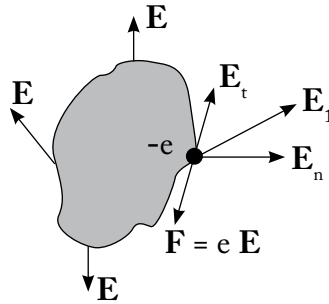


Figura 3.9. Material conductor irregular

Propiedad d) En la figura 3.10, se demuestra que, en un material conductor, todas las cargas se encuentran únicamente en la superficie del material.

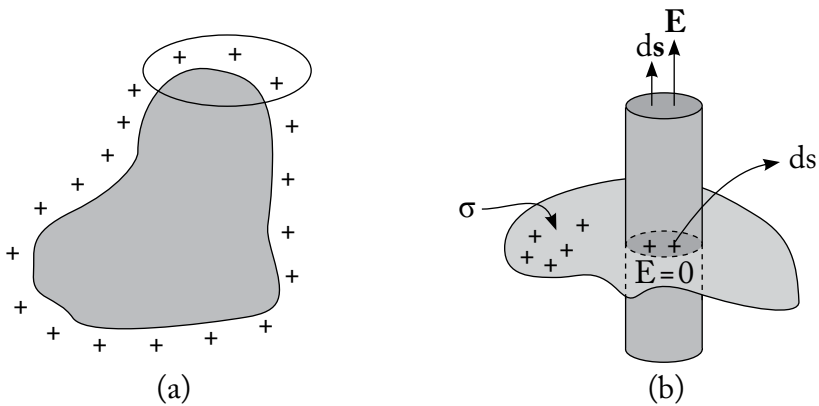


Figura 3.10 (a) Material conductor.
 b) Sección del material conductor amplificado

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma ds$$

$$\int E ds \cos 0^\circ = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int ds$$

$$E \int ds = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int ds$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

3.5 Ejercicios de aplicación (problemas resueltos del capítulo 3)

Problema 3.1. Calcular el campo eléctrico E , debido a un plano no conductor e infinito que tiene una carga uniforme por unidad de área σ (ver figura 3.11).

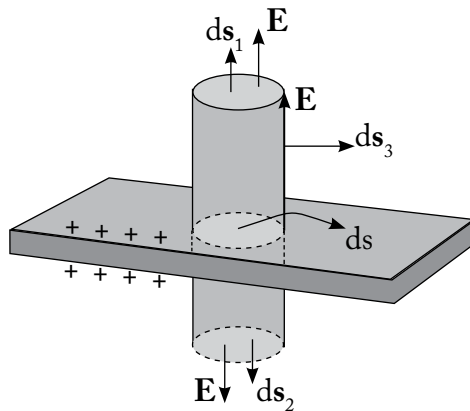


Figura 3.11. Plano infinito

Solución:

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_1 + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_2 + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_3$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} E ds_1 \cos 0^\circ + \int_{S_2} E ds_2 \cos 0^\circ + \int_{S_3} E ds_3 \cos 90^\circ$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} E ds_1 + \int_{S_2} E ds_2 + \int_{S_3} (0)$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = S$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = ES_1 + ES_2 + 0 = ES + ES = 2ES$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2ES$$

$$Q_n = \sigma S$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Problema 3.2. Un cilindro no conductor y muy largo de radio a , tiene una carga uniforme por unidad de volumen ρ . Calcular el campo eléctrico en un punto situado dentro y fuera del cilindro (figura 3.12 (a)).

Solución:

En la figura 3.12 (a), procedemos a calcular el campo eléctrico dentro ($r < a$) y fuera ($r > a$) del cilindro, utilizando la ley de Gauss:

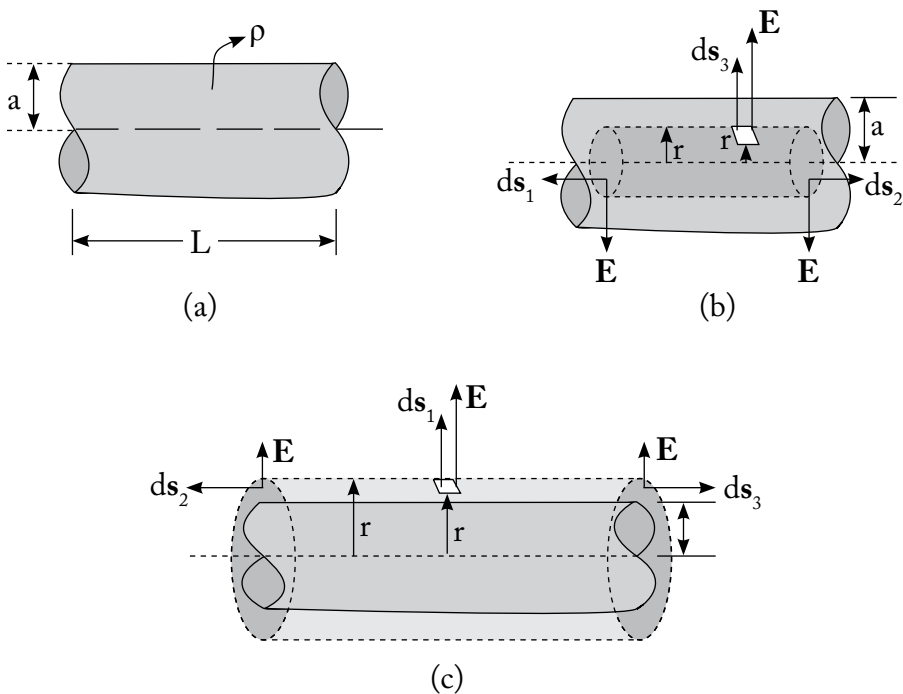


Figura 3.12. (a) Cilindro de longitud infinito. (b) E para $r < a$. (c) E para $r > a$

a) Para $r < a$

En la figura 3.12 (b):

$$\phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$\int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_2 + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_3 = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dv$$

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_1 \cos 90^\circ + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_2 \cos 90^\circ + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_3 \cos 0^\circ = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int dv$$

$$0 + 0 + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_3 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^r dv$$

$$E S_3 = \frac{\rho V}{\epsilon_0}$$

$$S = S_3 = 2 \pi r L, \quad \text{superficie lateral del cilindro}$$

$$V = \pi r^2 L, \quad \text{volumen del cilindro}$$

$$E 2 \pi r L = (\rho / \epsilon_0) \pi r^2 L$$

$$E = \frac{\rho r}{\epsilon_0 2} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} r$$

b) Para $r > a$:

En la figura 3.12 (c):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_1 + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_2 + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_3 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a \rho dv$$

$$\int_{S_1} E ds_1 \cos 0^\circ + \int_{S_2} E ds_2 \cos 90^\circ + \int_{S_3} E ds_3 \cos 90^\circ = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^a dv$$

$$\int_{S_1} E ds_1 \cdot 0 + 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^a dv$$

$$ES_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} V|_0^a$$

$$S_1 = 2\pi rL; \quad V|_0^a = \pi a^2 L$$

$$E2\pi rL = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi a^2 L$$

$$E = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Problema 3.3. Calcular el campo eléctrico en el exterior de una esfera de radio a , que tiene una distribución volumétrica de cargas (ver figura 3.13).

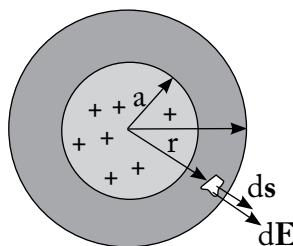


Figura 3.13. Cálculo de E para $r > a$

Solución:

En la figura 3.13, la esfera de radio a tiene una distribución volumétrica de cargas uniformes. Para calcular el campo eléctrico en el exterior ($r > a$) de la esfera de radio a , se procede de la siguiente manera. Escogemos una superficie gaussiana de forma esférica de radio r , para que nos garantice que las líneas de campo eléctrico lo atraviesen en forma perpendicular. Sobre esta superficie, cogemos un diferencial ds , sobre el cual dibujamos los dos vectores \mathbf{E} y $d\mathbf{s}$; luego, utilizando la fórmula de la ley de Gauss, tenemos:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

La integral cerrada de superficie de la esfera tiene una sola superficie abierta. La carga neta Q_n la reemplazamos por una distribución volumétrica de cargas:

$$\int_0^r \mathbf{E} \, ds \, \cos 0^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a \rho \, dv$$

$$ES|_0^r = \frac{\rho}{\epsilon_0} V|_0^a$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right)$$

$$E = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Problema 3.4. La figura 3.14 muestra una sección de una barra infinita de carga. La densidad lineal de carga λ (esto es, la carga por unidad de longitud medida en coul/metro) es constante para todos los puntos de la línea. Encontrar una expresión para E a una distancia r de la línea.

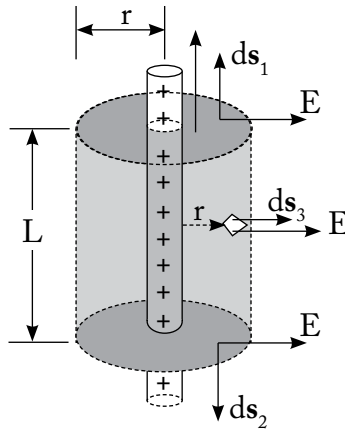


Figura 3.14. Una barra infinita con una distribución lineal de cargas

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0} \quad (3-3)$$

$$Q_n = \int \lambda dx$$

$$\lambda = \frac{Q_n}{L}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{s_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_1 + \int_{s_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_2 + \int_{s_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_3$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{s_1} E ds_1 \cos 90^\circ + \int_{s_2} E ds_2 \cos 90^\circ + \int_{s_3} E ds_3 \cos 0^\circ$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 + 0 + \int_{s_3} E ds_3 = Es_3$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Es_3 \quad (3-4)$$

(3-4) en (3-3):

$$E s_3 = \frac{Q_n}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \lambda dx$$

$$E s_3 = \frac{\lambda}{\epsilon_0} L \quad S_3 = 2\pi r L$$

$$E 2\pi r L = \frac{\lambda}{\epsilon_0} L$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Problema 3.5. Calcular el campo eléctrico entre dos placas metálicas (conductoras) (figura 3.15).

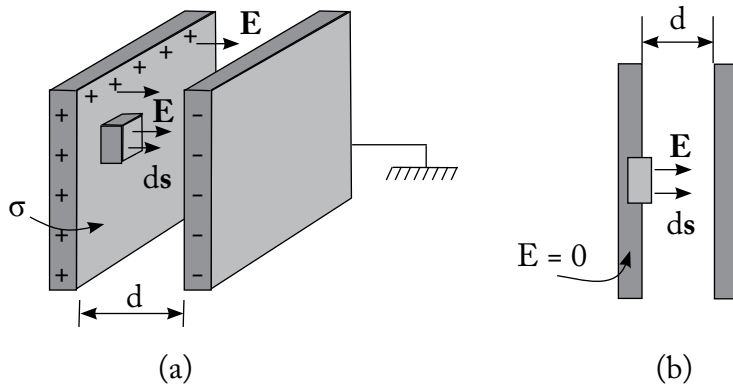


Figura 3.15. (a) Capacitor de placas paralelas. (b) Vista frontal de (a)

Solución:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$Q_n = \int \sigma ds$$

$$\int E ds \cos 0^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma ds$$

$$ES = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Problema 3.6. “La figura 3.16 muestra una carga punto de 1.0×10^{-7} coul, en el centro de una cavidad esférica con radio de 3.0 cm, en un trozo de metal. Use la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico en el punto *a* a la mitad del centro a la superficie, y en el punto *b*” (Resnick y Halliday, 1977, p. 873).

Solución:

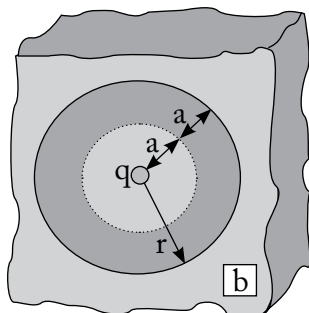


Figura 3.16. Carga *q* en el centro de una cavidad esférica

En la figura 3.16, la carga q es positiva y está en el centro de la esfera. Para calcular el campo eléctrico, utilizamos una superficie gaussiana de forma esférica que encierre la carga total q . Las líneas de campo eléctrico atraviesan esta superficie gaussiana en forma perpendicular. Como se trata de una carga de signo positivo, los dos vectores \mathbf{E} y $d\mathbf{s}$ son perpendiculares al diferencial ds y forman un ángulo de cero grados, similar al gráfico de la figura 3.13, razón por la cual no lo dibujamos en la figura 3.16. A continuación, procedemos a realizar los cálculos:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$\int E \, ds = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$ES = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E4\pi a^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2}, \quad a = \frac{r}{2}$$

$$E = kq \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = kq \frac{4}{r^2} = 4k \frac{q}{r^2} = 4(9 \times 10^9) \frac{1.0 \times 10^{-7}}{(0.03)^2} = 4.0 \times 10^6$$

$$E = 4.0 \times 10^6 \quad \text{N/coul}$$

En el punto b, el campo eléctrico es igual a cero, ya que se trata de un metal y, dentro del metal, $E = 0$.

Problema 3.7. “Una esfera metálica de paredes delgadas tiene 25 cm de radio y lleva una carga de 2.0×10^{-7} coul. Encontrar E para un punto a) dentro de la esfera, b) fuera de la esfera y muy cerca de ella, y c) a 3.0 m del centro de la esfera (figura 3.17)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 875).

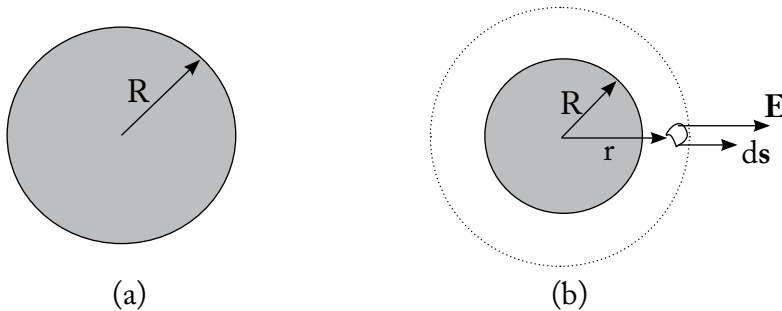


Figura 3.17. (a) Esfera metálica de paredes delgadas. (b) E para $r > R$

a) Para $r < R$:

En la figura 3.17 (a), las cargas se encuentran distribuidas en la superficie, entonces el campo eléctrico en el interior de la esfera es igual a cero ($E = 0$).

b) Para $r > R$:

En la figura 3.17 (b), se coloca una superficie gaussiana de radio r y se ubican los vectores E y ds , los cuales forman un ángulo de cero grados. Procedemos a realizar los cálculos utilizando la ecuación de Gauss.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad Q_n = \int \sigma ds_1$$

$$\int E ds \cos 0^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma ds_1 \quad \sigma = \frac{Q_n}{S_1}$$

$$E \int ds = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int ds_1 \quad S = 4\pi r^2$$

$$ES = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S_1 \quad S_1 = 4\pi R^2$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S_1 = \frac{Q_n}{\epsilon_0 S_1} S_1$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_n}{r^2} = k \frac{Q_n}{r^2}$$

$$E = (9 \times 10^9) \frac{2.0 \times 10^{-7}}{(0.25)^2} = 288 \times 10^2 \text{ N/coul}$$

c) Para $r = 3.0$ m:

$$E = k \frac{Q_n}{r^2}$$

$$E = (9 \times 10^9) \frac{2.0 \times 10^{-7}}{(3.0)^2} = 2 \times 10^2 \text{ N/coul}$$

$$E = 2 \times 10^2 \text{ N/coul}$$

Problema 3.8. “Un electrón de 100 eV se dispara directamente hacia una gran placa metálica que tiene una densidad de carga superficial de -2.0×10^{-6} coul /m². ¿Desde qué distancia debe dispararse el electrón para que llegue casi a pegar a la placa? (figura 3.18)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 875).

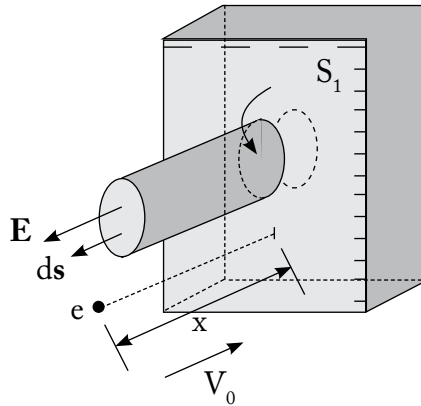


Figura 3.18. Un electrón se dispara hacia una placa metálica.

Solución:

$$V^2 = V_0^2 + 2ax$$

Donde, V es la velocidad final, V_0 es la velocidad inicial, a es la aceleración y x es el espacio recorrido. Debido a que el electrón se va a detener, la velocidad final es igual a cero ($V = 0$) y queda la ecuación (3-5).

$$V_0^2 = -2ax \tag{3-5}$$

En la figura 3.18, utilizando Gauss, tenemos:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$\int E \, ds \cos 0^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma ds_1$$

$$ES = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S_1$$

$$S = S_1$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{3-6}$$

La fuerza eléctrica es $F = QE$ y la fuerza mecánica es $F = ma$; igualando estas dos ecuaciones, tenemos: $ma = QE$. Despejando la aceleración, tenemos la ecuación (3-7).

$$a = \frac{QE}{m} \tag{3-7}$$

Reemplazando la ecuación (3-6) en (3-7), tenemos:

$$a = \frac{\sigma Q}{\epsilon_0 m}$$

Este valor reemplazamos en la ecuación (3-5):

$$V_0^2 = -2 \frac{\sigma Q}{\epsilon_0 m} x \tag{3-8}$$

Pero $100 \text{ ev} = \frac{1}{2} m V_0^2$, despejando V_0^2 :

$$V_0^2 = \frac{200 \text{ ev}}{m} \tag{3-9}$$

$$(3-8) = (3-9)$$

$$-2 \frac{\sigma Q}{\epsilon_0 m} x = \frac{200 \text{ ev}}{m}, \text{ siendo } \text{ev} = \text{electrón voltio}$$

$$x = - \frac{100 \text{ ev} \epsilon_0}{\sigma Q}$$

Pero el valor de un ev es igual al valor de la carga Q ; entonces:

$$x = - \frac{100 \epsilon_0}{\sigma} = - \frac{(100)(8.9 \times 10^{-12})}{-2.0 \times 10^{-6}} = 4.45 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Problema 3.9. “La fig. 3.19 muestra un cascarón esférico no conductor de carga, de densidad uniforme ρ (coul/m³). Hacer una gráfica de E para diversas distancias r del centro del cascarón, variando de 0 a 30 cm. Supóngase que $\rho = 1.0 \times 10^{-6}$ coul/m³, $a = 10$ cm; y $b = 20$ cm” (Resnick y Halliday, 1977, p. 876).

Solución:

a) Para $0 < r \leq a$, $E = 0$, ya que $Q_n = 0$.

b) Para $a < r \leq b$ (figura 3.19 (b))

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

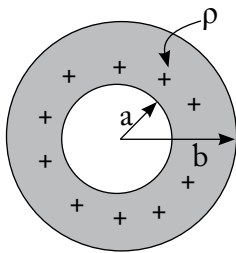
$$Q_n = \int \rho dv$$

$$\int E ds \cos 0^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dv$$

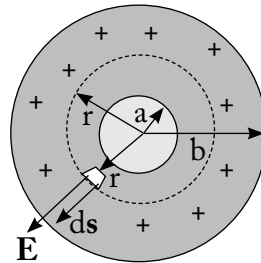
$$E[S]_0^r = \frac{\rho}{\epsilon_0} [V]_a^r$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi(r^3 - a^3)$$

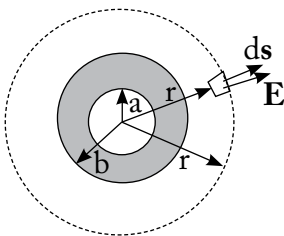
$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \quad (3-10)$$



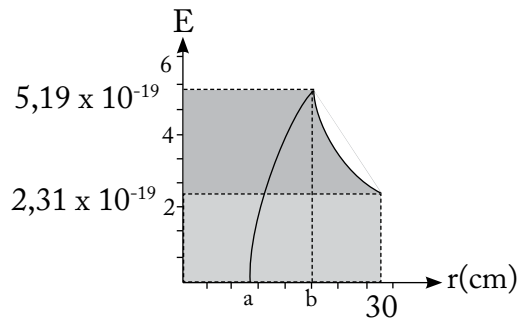
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.19. (a) Cascarón esférico no conductor. (b) E para $a < r < b$. (c) E para $r > b$, d) gráfico de E vs. r

c) Para $r > b$ (figura 3.19 (c)):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$\int E ds \cos 0^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dv$$

$$E[S]_0^r = \frac{\rho}{\epsilon_0} [V]_a^b$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi (b^3 - a^3)$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{b^3 - a^3}{r^2} \right) \quad (3-11)$$

Para $r = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$, en la ecuación (3-11):

$$E = \frac{1.0 \times 10^{-6}}{3(8.9 \times 10^{-12})} \left(\frac{(0.2)^3 - (0.1)^3}{(0.3)^2} \right) = 2.31 \times 10^{-19}$$

$$E = 2.31 \times \text{N / coul}$$

Para $r = b$ en la ecuación (3-10):

$$E = \frac{1.0 \times 10^{-6}}{3(8.9 \times 10^{-12})} \left((0.2) - \frac{(0.1)^3}{(0.2)^2} \right) = 5.192 \times 10^{-19} \text{ N/coul}$$

Utilizando las ecuaciones (3-10), (3-11), los valores de E calculados para un $r = 30 \text{ cm}$ y $r = b$, además el valor de $E = 0$ para $r < a$, procedemos a graficar E vs. r , tal como lo muestra la figura 3.19 (d).

Problema 3.10. “La figura 3.20 muestra, en sección, dos largos cilindros concéntricos de radios a y b . Los cilindros llevan cargas iguales y opuestas, λ por unidad de longitud. Usando la ley de Gauss, demostrar a) que $E = 0$ para $r > b$ y para $r < a$, y b) que entre los cilindros E está dada por: (Resnick y Halliday, 1977, p.876)”.

$$E = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

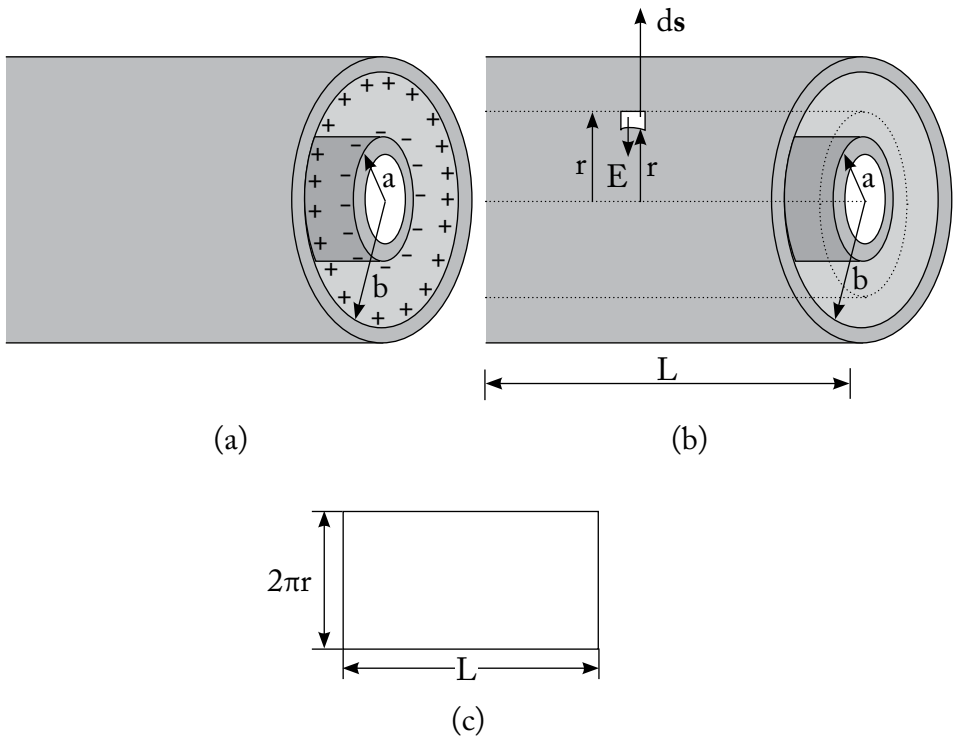


Figura 3.20. (a) Cilindros concéntricos de radios a y b .
 (b) E para $a < r < b$, c) área lateral del cilindro

Solución:

a) Para $r < a$, $E = 0$, ya que $Q_n = 0$

Para $r > b$: $Q_n = Q^+ - Q^- = 0$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E = 0$$

b) Para $a < r < b$ (figura 3.20 (b)):

En las dos tapas del cilindro, el campo eléctrico es cero, ya que el vector \mathbf{E} y el vector $d\mathbf{s}$ forman un ángulo de 90° . La superficie lateral es la única que contribuye para el cálculo del campo eléctrico.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0} \quad S = \text{área lateral}$$

$$Q_n = -\int \lambda dx \quad S = 2\pi rL$$

$$\int_0^r E ds \cos 180^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} (-\int_0^L \lambda dx)$$

$$-ES = -\frac{\lambda}{\epsilon_0} L$$

$$E(2\pi rL) = \frac{\lambda}{\epsilon_0} L$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad \text{lo que queríamos demostrar}$$

CAPÍTULO 4 POTENCIAL ELÉCTRICO

4.1 Trabajo

Sears y Zemansky (1966, p. 152) sostienen que se realiza trabajo (W) cuando la fuerza aplicada está en la misma dirección que el desplazamiento. Considerando la figura 4.1, solo realiza trabajo el componente de la fuerza $F \cos \theta$, ya que está en la misma dirección que el desplazamiento. El trabajo que se realiza para mover el bloque M desde el punto A , un diferencial de distancia dl , viene dado por:

$$dW = F \cos \theta dl$$

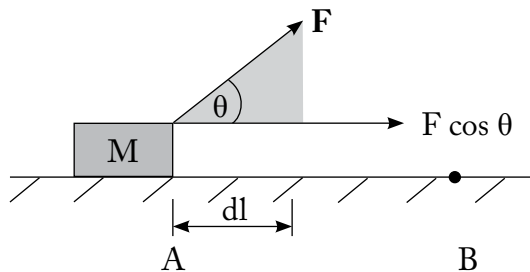


Figura 4.1. Bloque deslizándose desde A hasta B, una distancia dl .

Para obtener el trabajo total, integramos desde el punto A hasta el punto B; esto es:

$$W = \int_A^B dw = \int_A^B F \cos \theta dl$$

$$W = \Delta E = \Delta U + \Delta k$$

ΔU = variación de energía potencial

Δk = variación de energía cinética

Campo gravitacional

Un campo es conservativo cuando el trabajo realizado por un cuerpo es independiente del camino seguido por este, y solo depende de la posición inicial y final del mismo, no interesa la trayectoria que se va a seguir (figura 4.2).

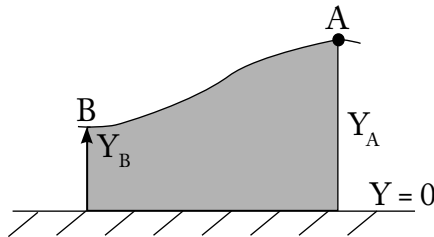


Figura 4.2. Movimiento de un cuerpo en el espacio gravitacional desde A hasta B

Demostrar que, para cualquier distribución de carga en reposo, el campo eléctrico es conservativo. Al movimiento bastante lento, se denomina *movimiento cuasiestático*.

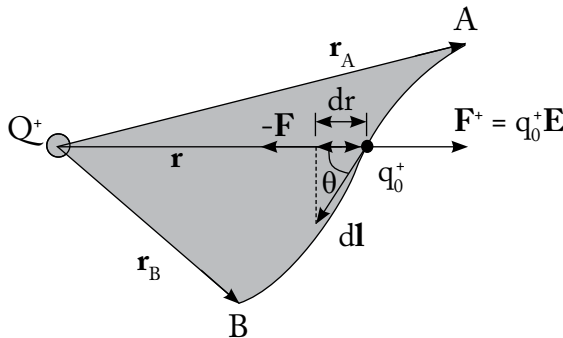


Figura 4.3. Carga q_0^+ desplazándose en un campo eléctrico producido por la carga Q^+ .

En la figura 4.3, se encuentra una carga de prueba q_0^+ moviéndose desde el punto A hacia el punto B dentro de un campo eléctrico E , producido por la carga Q^+ , donde la fuerza eléctrica F^+ es igual a la fuerza mecánica $-F$; entonces, la fuerza neta sobre la carga es aproximadamente igual a cero.

$$F_{\text{neta}} = F^+ - F \approx 0$$

$$v \approx \text{cte.}$$

$$a \approx 0$$

$\Delta k \approx 0$, la energía potencial no depende de la trayectoria que recorra la carga.

Donde: a = aceleración, v = velocidad

El trabajo realizado por la fuerza mecánica es idéntico al trabajo realizado por la fuerza eléctrica. En la figura 4.3, el trabajo que se realiza para mover la carga q_0^+ , desde el punto A hasta el punto B, viene dado por la ecuación (4-1):

$$W = \int_A^B F \, dl \, \text{Cos } \theta \quad (4-1)$$

El vector desplazamiento $d\mathbf{l}$, en cualquier punto de la trayectoria, siempre es tangente. Para que se cumpla con la definición de trabajo, se coge el componente del desplazamiento $dl \, \text{Cos } \theta$, el cual está en la misma dirección de la fuerza $-F$; dl es una variable ficticia, debemos relacionarlo con la variable real del problema. El campo eléctrico que produce la carga Q^+ varía con el radio r ; esto es:

$$dr = dl \, \text{Cos } \theta$$

$$F = -q_0^+ E$$

El campo eléctrico producido por una carga puntual es $E = k \frac{Q}{r^2}$.

Reemplazando estos valores en la ecuación (4-1), tenemos:

$$W = \int_A^B -q_0^+ E \, dr = \int_A^B -q_0^+ k \frac{Q}{r^2} \, dr = -kq_0^+ Q \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

$$W = -kq_0^+ Q \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B \quad q_0^+ = q_0$$

$$W = kq_0 Q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

$$W = q_0 \int_A^B E \, dl \cos \theta$$

$$W = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \text{cte.}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad , \quad \text{integral cerrada de línea}$$

$$\Delta k \approx 0$$

$$w = \Delta U + \Delta k$$

$$w = \Delta U$$

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

4.2 Energía potencial

$$w = \Delta U = -q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

4.3 Diferencia de potencial

Considerando la figura 4.4, tenemos:

$$\frac{w}{q_0} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad , \quad \text{Diferencial de potencial}$$

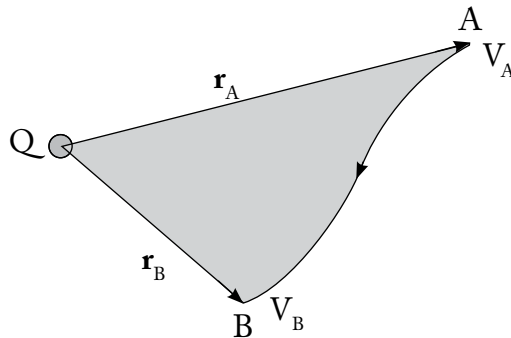


Figura 4.4. Potencial eléctrico en el punto A (V_A) y el punto B (V_B)

$$\frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\frac{w}{q_0} = V \quad W = U$$

$$\frac{U_B - U_A}{q_0} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\frac{w}{q_0} \left[\frac{\text{Joule}}{\text{coul}} \right] = [\text{volt}]$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad [\text{volt}]$$

1) Si un conductor se conecta a tierra, el potencial de tierra (V_T) es igual a cero.

$V_T = 0$, tal como se muestra en la figura 4.5.

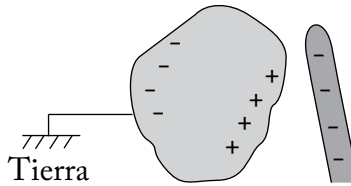


Figura 4.5. Material conductor conectado a tierra.

La carga q_0 está distribuida en toda la superficie de la tierra, por lo tanto $\sigma = 0$.

2) El potencial eléctrico en el punto p, cuando p está en el infinito, su valor es cero.

$V_p = 0$, (figura 4.6).

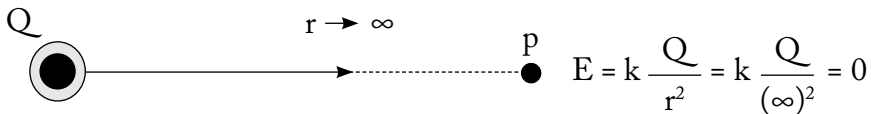


Figura 4.6. Campo eléctrico en el punto P, producido por la carga Q.

3) Potencial en un punto P (figura 4.7). Para hallar el potencial eléctrico en el punto P, debemos realizar un trabajo para moverse desde el infinito hasta el punto P.

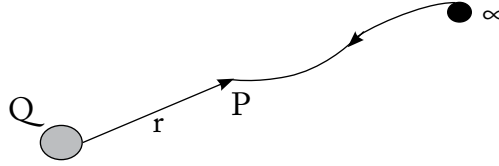


Figura 4.7. Potencial eléctrico en el punto P, producido por la carga Q.

$$\frac{w}{q_0} = -\int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$w = -q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 QK \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$\frac{w}{q_0} = \frac{\Delta U}{q_0} = V_B - V_A = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = QK \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$V_B - V_A = V_P - V_{\infty} = QK \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{\infty} \right)$$

$$V_{\infty} = 0$$

$$V_P - 0 = KQ \left(\frac{1}{r_P} \right)$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_P}$$

4.3.1 Diferencia de potencial entre dos puntos

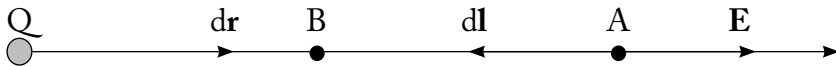


Figura 4.8. Diferencia de potencial entre el punto A y B

En la figura 4.8, se muestra una carga Q que genera un campo eléctrico. Se desea calcular el potencial eléctrico entre los dos puntos A y B.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$d\mathbf{l} = -dr$$

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int E dl \cos 180^\circ = -\int E dl = -\int E (-dr)$$

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int E dr$$

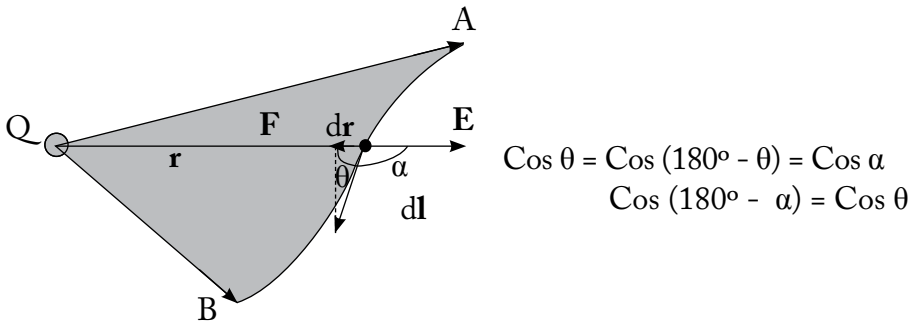


Figura 4.9. Campo eléctrico generado por la carga Q a una distancia r .

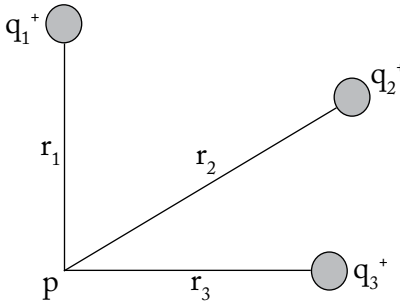
$$dr = dl \cos \theta$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B E dr = -\int_A^B \frac{kQ}{r^2} dr = -kQ \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B$$

$$V_B - V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

4.4 Potencial debido a varias cargas puntuales

Considerando la figura 4.10, los potenciales V_1 , V_2 y V_3 producidos por las cargas q_1 , q_2 , q_3 son:



$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2}$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_3}$$

Figura 4.10. Potencial eléctrico en el punto p, debido a las cargas q_1 , q_2 y q_3 , positivos.

Donde el potencial eléctrico en p es:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \right)$$

Generalizando para N cargas, el potencial en un punto generado por un conjunto de N cargas es igual a:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$$

$$Q_n = \sum q_i = \int \lambda \, dx; \quad \text{para una distribución lineal de cargas}$$

$$Q_n = \sum q_i = \int \sigma \, dx; \quad \text{para una distribución superficial de cargas}$$

$$Q_n = \sum q_i = \int \rho \, dx; \quad \text{para una distribución volumétrica de cargas}$$

4.5. Relación entre potencial y campo eléctrico

$$\Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B E \, dl \, \text{Cos } \theta$$

$$dv = - E \, dl \, \text{Cos } \theta$$

$$\frac{dv}{dl} = - E \, \text{Cos } \theta \quad (4-2)$$

(4-2) es la variación o rapidez con que varía el potencial en la dirección dl . Según la figura 4.11, conociendo el potencial eléctrico en el punto p , podemos hallar el campo eléctrico en ese punto, esto es:

$$E_x = - \frac{dv}{dx}$$

$$E_y = - \frac{dv}{dy}$$

$$E_z = - \frac{dv}{dz}$$

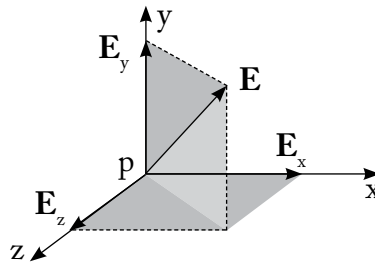


Figura 4.11. Componentes del campo eléctrico en el espacio tridimensional

Superficies equipotenciales.- Es el lugar geométrico de los puntos de igual potencial eléctrico. También podemos decir que son superficies que tienen el mismo nivel de energía.

En la figura 4.12 (a), el campo eléctrico atraviesa en forma perpendicular la superficie equipotencial.

Considerando la figura 4.12 (b), en la trayectoria 1_2 la diferencia de potencial es cero, porque ambos puntos están en la misma superficie equipotencial; y para moverse en una misma superficie, no hace trabajo. En la trayectoria 3_4, existe una diferencia de potencial, ya que se mueve a tra-

vés de superficies equipotenciales diferentes y, consecuentemente, realizan trabajo.

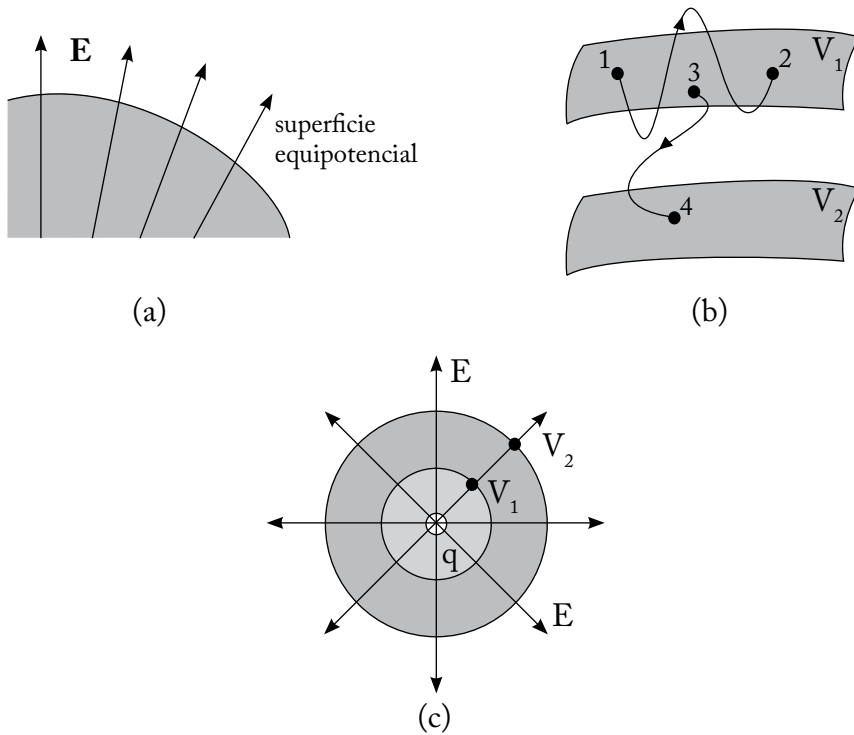
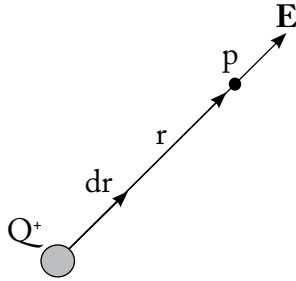


Figura 4.12. Superficies equipotenciales. (a) una sola superficie equipotencial, (b) dos superficies equipotenciales, (c) a medida que varía el radio, las superficies equipotenciales son diferentes.

Considerando la figura 4.12 (c), se ubica una carga q positiva en el centro, el cual genera líneas de campo eléctrico en forma radial y hacia fuera. Se trazan dos superficies equipotenciales de valores V_1 y V_2 , siendo $V_1 > V_2$. Estas superficies equipotenciales son de forma esférica.

4.6 Cálculo de campos eléctricos mediante el potencial



$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

$$\frac{dV}{dl} = -E \cos \theta$$

$$\frac{dV_P}{dr} = -E_r \quad (4-3)$$

Figura 4.13. Campo eléctrico en el punto p

Conociendo el potencial eléctrico en el punto p (figura 4.13), podemos calcular el campo eléctrico derivando el potencial con respecto al radio, ya que en esa dirección varía el campo eléctrico.

$$\frac{dV_P}{dr} = \frac{d}{dr} (V_P) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr} (r^{-1})$$

$$\frac{dV_P}{dr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (-1)r^{-2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$\frac{dV_P}{dr} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (4-4)$$

La ecuación (4-3) se reemplaza en la ecuación (4-4):

$$-E_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

4.7 Energía en el campo electrostático

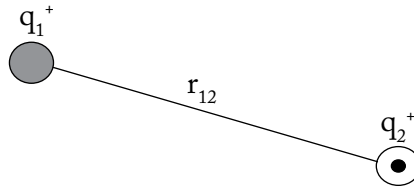


Figura 4.14. Energía en el campo electrostático, producido por las cargas q_1 y q_2 ,

El potencial eléctrico en un punto p viene dado por la siguiente fórmula:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

La energía electrostática generada por las cargas q_1 y q_2 (figura 4.14) está dada por:

$$w = Vq_2$$

Siendo V el potencial generado por la carga q_1^+ :

$$\Delta V = \frac{w}{q}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

$$w = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

$$w = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = U_2$$

Si aumentamos una tercera carga (figura 4.15):

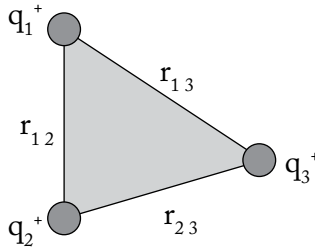


Figura 4.15 Energía en el campo electrostático producido por las cargas q_1 , q_2 y q_3 .

La energía electrostática almacenada por las tres cargas viene dada por:

$$U_T = U_2 + Vq_3.$$

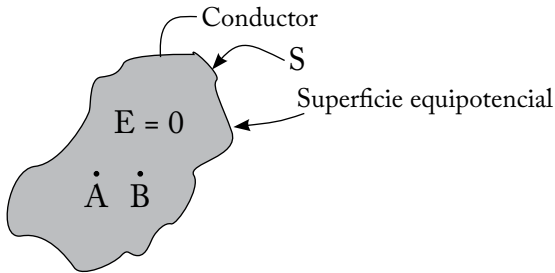
Siendo V el potencial generado por las cargas q_1^+ y q_2^+ en q_3^+ . Entonces,

$$V = k \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

$$U_T = \frac{k q_1 q_2}{r_{12}} + k \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) q_3$$

$$U_T = k \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{21}} \right)$$

Potencial en el interior de la superficie de un conductor (figura 4.16)



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$V_s = -\int_{\infty}^s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$V_s = k \frac{Q}{r}$$

Figura 4.16. Material conductor

El potencial en el interior es igual al potencial en la superficie, debido a que el campo eléctrico en el interior de un conductor es cero; esto es:

$$V_{AB} = -\int_A^B E \, dl \, \cos \theta$$

Como el campo eléctrico $E = 0$, entonces $V_{AB} = 0$.

Podemos demostrarlo utilizando derivadas:

$$dv = -E \, dl \, \cos \theta$$

$dv = 0$, entonces el voltaje es constante, $V = \text{cte}$.

También podemos demostrar gráficamente, tal como lo indica la figura 4.17.

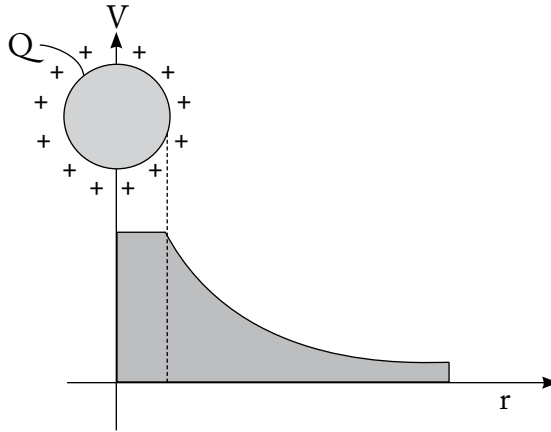
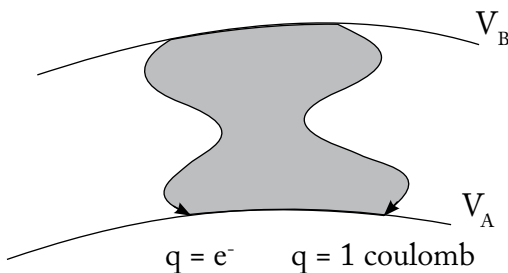


Figura 4.17. Gráfico del potencial eléctrico V en función del radio r

4.8 El electrón-voltio

$$\Delta V = \frac{w}{q}$$

$$V_{AB} = \frac{W_{AB}}{q_0^+} \left[\frac{\text{joule}}{\text{coul}} \right] = \text{voltio}$$



e^-v = electrón-voltio

$V_B - V_A = 1$ voltio

$e^- = 1,602 \times 10^{-19}$ coul

$$\Delta V = \frac{w}{e} = \frac{e^-v}{e}$$

$$1e^-v = (\Delta V)(e^-)$$

$$1e^-v = (1 \text{ volt})(1,602 \times 10^{-19} \text{ coul})$$

$$1e^-v = 1,6 \times 10^{-19} \text{ joule}$$

Figura 4.18. Movimiento de un electrón

4.9 Ejercicios de aplicación (problemas resueltos del capítulo 4)

Problema 4.1. Una partícula de carga q_0 está cerca de un plano infinito y no conductor, de carga por unidad de superficie σ . Calcular el trabajo necesario para desplazarla de A a B, a lo largo de:

- La trayectoria de la línea recta a que conecta A y B, suponiendo que esta línea forma un ángulo α con la línea AD, que es perpendicular al plano.
- A lo largo de la trayectoria de línea recta \overline{AD} y \overline{BD} .

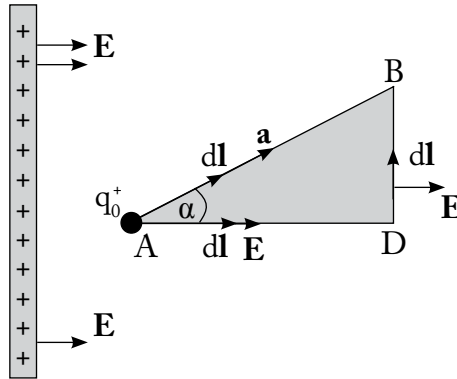


Figura 4.19. Partícula cerca de un plano infinito

Solución:

- Trabajo realizado en la trayectoria de \overline{AD} (figura 4.19)

$$W_{AB} = q_0^+ \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0^+ \int_A^B E \cdot dl \cos \alpha = q_0^+ E \cos \alpha \int_A^B dl$$

$$W_{AB} = q_0^+ E \cos \alpha (1|_A^B = q_0^+ E \cos \alpha (B - A) = q_0^+ E (\cos \alpha) a$$

$$W_{AB} = q_0^+ E (\cos \alpha) a \tag{4-5}$$

Sabemos que el campo eléctrico producido por un plano infinito distribuido superficialmente y a los dos lados del plano es:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Reemplazando en la ecuación (4-5), nos da como resultado la ecuación (4-6):

$$W_{AB} = \frac{q_0^+ \sigma a \cos \alpha}{2\epsilon_0} \quad (4-6)$$

b) Trabajo realizado en la trayectoria de \overline{AD} y \overline{BD} (figura 4.19):

$$W_{AD} = q_0^+ \int_A^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0^+ \int_A^D E dl \cos 0^\circ = q_0^+ E \int_A^D dl$$

$$W_{AD} = q_0^+ E (l|_A^D = q_0^+ E (D - A) = q_0^+ E a \cos \alpha$$

$$W_{AD} = q_0^+ E a \cos \alpha$$

$$W_{AD} = \frac{q_0^+ \sigma a \cos \alpha}{2\epsilon_0}$$

$$W_{DB} = q_0^+ \int_D^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0^+ \int_D^B E dl \cos 90^\circ = 0$$

$$W_{DB} = 0$$

$$W_{AB} = W_{AD} + W_{DB}$$

$$W_{AB} = \frac{q_0^+ \sigma a \cos \alpha}{2\epsilon_0} + 0$$

$$W_{AB} = \frac{q_0^+ \sigma a \cos \alpha}{2\epsilon_0} \quad (4-7)$$

Conclusión:

El trabajo efectuado desde el punto A hasta el punto B no depende de la trayectoria, solo depende de la posición inicial y final, esto es (4-6) = (4-7).

Problema 4.2. En una varilla delgada de longitud L , colocada en el eje de las x con el extremo en el origen, se encuentra distribuida una carga por unidad de longitud λ dado por la expresión $\lambda = kx$, siendo k una constante. Calcule el potencial eléctrico en el punto p de coordenadas $p(0, y)$.

Solución:

Sabemos que el potencial eléctrico en un punto p con respecto al infinito y para cargas puntuales viene dado por la ecuación (4-8):

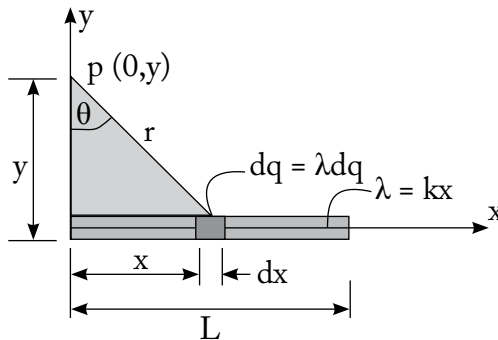


Figura 4.20. Varilla con una distribución lineal de cargas

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \tag{4-8}$$

Debido a que el problema se trata de una distribución de cargas lineales, debemos proceder de la siguiente manera:

En la figura 4.20, la varilla de longitud L se encuentra en el eje x . Cogemos un diferencial de distancia dx , en la cual se encuentra un diferencial de cargas dq , a su vez este diferencial de cargas produce un diferencial de potencial dV_p , entonces la ecuación (4-8) se modifica y se representa en la ecuación (4-9); luego, se continúa con el proceso.

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad (4-9)$$

$$dq = \lambda dx$$

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r}$$

Para calcular el potencial total en el punto p , procedemos a integrar:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dx}{r}$$

Pero, por dato del problema $\lambda = kx$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{kx dx}{r}$$

$$r = \sqrt{y^2 + x^2}$$

$$V_p = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{x dx}{(y^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$u = y^2 + x^2$$

$$du = 2x dx \quad \rightarrow \quad x dx = \frac{du}{2}$$

$$V_p = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{du}{2u^{1/2}} = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du$$

$$V_p = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{u^{1/2}}{1/2} = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \left[(y^2 + x^2)^{1/2} \right]_p$$

$$V_p = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \left[(y^2 + L^2)^{1/2} - y \right]$$

Problema 4.3. Calcular el potencial sobre el eje y , y a una distancia z del plano de un lazo circular de radio a que lleva una carga por unidad de longitud λ .

Solución:

Considerando la figura 4.21, en un diferencial de arco ds existe un diferencial de cargas dq , y este produce un diferencial de potencial eléctrico en el punto p . Procedemos de forma similar que en el problema 4.2:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda ds}{r}$$

$$r = (z^2 + a^2)^{1/2}$$

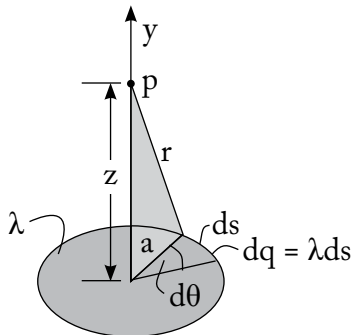


Figura 4.21. Lazo circular con una distribución lineal de cargas

$$V_p = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^{2\pi a} ds = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_0^{2\pi a}$$

$$V_p = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} (2\pi a)$$

$$V_p = \frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{1/2}}$$

De otra forma:

$$V_p = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int ds = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^{2\pi} a d\theta = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V_p = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 r} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 r} 2\pi = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 r}$$

$$V_p = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{1/2}}$$

Problema 4.4. A partir del potencial eléctrico, calcular el campo eléctrico en el punto p que se encuentra a una distancia r .

Solución:

Considerando la figura 4.22, procedemos a calcular el campo eléctrico que produce el dipolo en el punto p , razón por la cual debe cumplirse la restricción de que el radio r debe ser mucho mayor que la distancia $2a$.

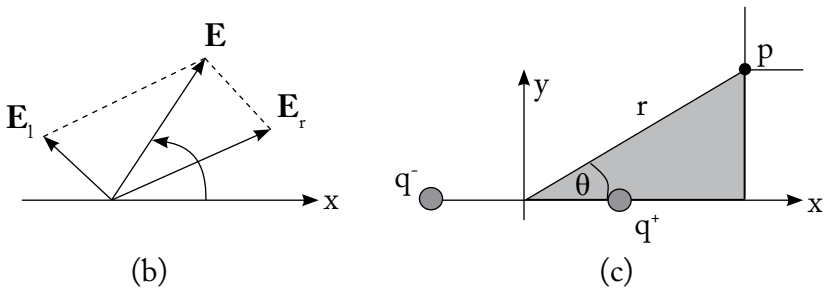
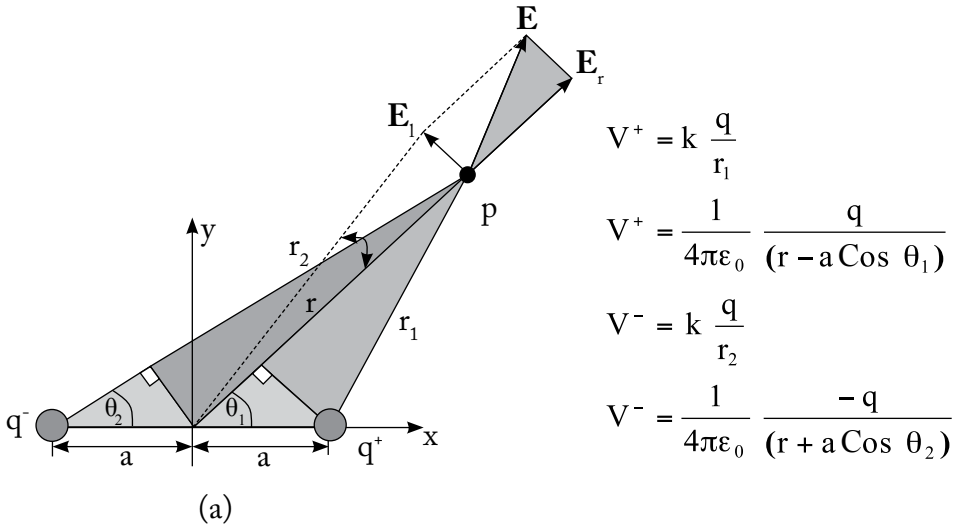


Figura 4.22. (a) Campo eléctrico en el punto p producido por un dipolo, (b) y (c) secciones de (a).

$$V_p = V^+ + V^-$$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r - a \cos \theta_1)} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r + a \cos \theta_2)}$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(r - a \cos \theta_1)} - \frac{1}{(r + a \cos \theta_2)} \right]$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r + a \cos \theta_2 - r + a \cos \theta_1}{(r - a \cos \theta_1)(r + a \cos \theta_2)} \right]$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a \cos \theta_2 + a \cos \theta_1}{(r - a \cos \theta_1)(r + a \cos \theta_2)} \right]$$

Como $r \gg a \rightarrow \theta_1 \cong \theta_2 \cong \theta$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a \cos \theta + a \cos \theta}{(r)(r)} \right]$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2a \cos \theta}{r^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq \cos \theta}{r^2}$$

$$p = 2aq$$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (4-10)$$

Una vez obtenido el potencial, ecuación (4-10), procedemos a calcular el campo eléctrico en el componente radial E_r y el componente longitudinal E_z , tal como lo muestra la figura 4.22 (b).

$$E_r = -\frac{\partial V_p}{\partial r}$$

$$E_r = -\frac{\partial}{\partial r}(V_p) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \right)$$

$$E_r = -\frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \frac{(-2)}{r^3}$$

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}, \text{ componente del campo eléctrico en la dirección radial}$$

$$dl = r d\theta$$

$$\frac{\partial V_p}{\partial l} = \frac{dV_p}{rd\theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial l} = -E_l \Rightarrow E_l = -\frac{\partial V}{\partial l}$$

$$E_l = -\frac{dV_p}{rd\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_p}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_p)$$

$$E_l = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \right)$$

$$E_l = -\frac{1}{r} \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta)$$

$$E_l = -\frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} (-\text{Sen } \theta)$$

$$E_l = \frac{p \text{ Sen } \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}, \text{ componente del campo en la dirección } l$$

Considerando la figura 4.22 (c) y la ecuación (4-10), tenemos:

$$V_p = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$V_p = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4-11)$$

De la ecuación (4.11), derivamos con respecto a x :

$$E_x = -\frac{\partial V_p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (V_p) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(kp \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right)$$

$$E_x = -kp \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) = -kp \frac{\partial}{\partial x} (x(x^2 + y^2)^{-3/2})$$

$$E_x = -kp \left[x \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-5/2} 2x + (x^2 + y^2)^{-3/2} \right]$$

$$E_x = -kp \left[\frac{-3x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right]$$

$$E_x = -\frac{kp}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \left[-3x^2 + \frac{(x^2 + y^2)^{5/2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right]$$

$$E_x = -\frac{kp}{(x^2 + y^2)^{5/2}} (-3x^2 + x^2 + y^2)$$

$$E_x = -\frac{kp}{(x^2 + y^2)^{5/2}} [-2x^2 + y^2]$$

$$E_x = -\frac{k p (y^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, \text{ componente del campo en la direcci3n del eje } x$$

Utilizando la ecuaci3n (4-11), derivamos con respecto a y :

$$V_p = \frac{p}{4\pi \epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V_p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} (V_p)$$

$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{4\pi \epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) = -k p x \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right]$$

$$E_y = -k p x \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + y^2)^{-3/2}]$$

$$E_y = -k p x \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-5/2} (2y)$$

$$E_y = -k p x y 3 (x^2 + y^2)^{-5/2}, \text{ componente del campo en la direcci3n del eje } y$$

$$E_y = -\frac{3k p x y}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

Problema 4.5. “Una lámina infinita cargada tiene una densidad superficial de carga σ de $1,0 \times 10^{-7}$ coul/m². ¿Qué separación tienen dos superficies equipotenciales entre las cuales hay una diferencia de potencial de 5.0 volt? (ver figura 4.23)” (Resnick y Halliday, 1977, p. 913).

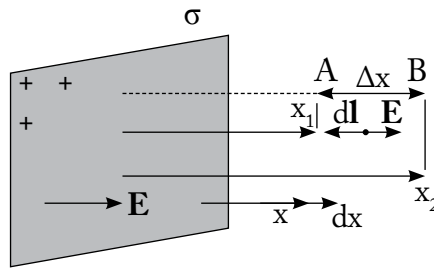


Figura 4.23. Lámina infinita con distribución σ

Solución:

En la figura 4.23, el desplazamiento se realiza desde la posición B hasta la posición A, tal como muestra el vector desplazamiento $d\mathbf{l}$; además, sabemos el valor del campo eléctrico E para una lámina infinita; esto es:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Utilizando la ecuación de la diferencia de potencial, procedemos de la siguiente forma:

$$V_{AB} = - \int_{x_2}^{x_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{x_2}^{x_1} E dl \cos 180^\circ = \int_{x_2}^{x_1} E dl$$

$$dl = - dx$$

$$V_{AB} = - \int_{x_2}^{x_1} E dx = - \int_{x_2}^{x_1} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x|_{x_2}^{x_1}) = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_1 - x_2)$$

$$V_{AB} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{2\epsilon_0 V_{AB}}{\sigma} = \frac{2(8.85 \times 10^{-12})(5)}{1.0 \times 10^{-7}} = 8.85 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta x = 0.885 \text{ mm}$$

Problema 4.6. Calcular el valor del potencial en cualquier punto a una distancia r de la esfera dieléctrica (ver figura 4.24).

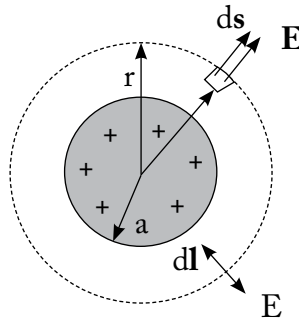


Figura 4.24. Esfera dieléctrica

Solución:

En la figura 4.24, procedemos a calcular el campo eléctrico para un radio $r > a$, para lo cual utilizamos la ecuación de la ley de Gauss; esto es:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$\int_0^r E ds \cos 0^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^a \rho dv$$

$$E(S) = \frac{\rho}{\epsilon_0} (V)$$
$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)$$
$$E = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Procedemos a calcular el potencial para un $r > a$ (figura 4.24), utilizando la fórmula del potencial en un punto p con respecto al infinito. Como se pide calcular el potencial en cualquier punto fuera de la esfera de radio a , debemos integrar desde el infinito hasta r , esto es:

$$V_p = -\int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^r E dl \cos 180^\circ = \int_0^r E dl$$
$$dl = -dr$$
$$V_p = -\int_0^r \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \int_0^r \frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \int_0^r r^{-2} dr$$
$$V_p = -\frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_0^r = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$$
$$V_p = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$$
$$V_p = V(r) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$$

Problema 4.7. Tres partículas, cada una de ellas de carga q , están en los vértices de un triángulo equilátero de lado a (ver figura 4.25). Calcular:

- La energía electrostática de esta configuración.
- El cambio de esta energía si se separan de las partículas, hasta que los lados del triángulo tengan una longitud de $2a$.

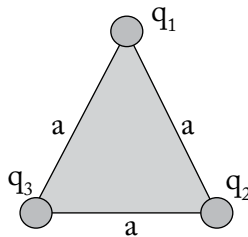


Figura 4.25 Tres partículas se encuentran en el vértice de un triángulo equilátero.

Solución:

a) U_3 = energía electrostática producida por las tres cargas

$$U_3 = k \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} = a$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$

$$U_3 = k \left(\frac{q^2}{a} + \frac{q^2}{a} + \frac{q^2}{a} \right) = \frac{3kq^2}{a}$$

$$U_3 = k \frac{3q^2}{a}$$

b)

$$U_3^1 = k \frac{3q^2}{2a}$$

$$\Delta U = U_3^1 - U_3$$

$$\Delta U = k \frac{3q^2}{2a} - k \frac{3q^2}{a} = \frac{3kq^2}{a} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{3kq^2}{a} \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\Delta U = -\frac{3}{2} k \frac{q^2}{a}$$

El signo menos (-) significa que la energía ha disminuido.

CAPÍTULO 5 CAPACITANCIA Y DIELECTRICOS

5.1 El condensador

Resnick y Halliday (1977) sostienen que el condensador está formado por dos materiales conductores, que poseen cargas iguales en magnitud y de signos opuestos (figura 5.1) (p. 922). El condensador, llamado también capacitor, se lo representa con la letra C. El material conductor A tiene carga positiva Q^+ y está a un potencial V_1 , mientras que el material conductor B tiene carga negativa Q^- y está a un potencial V_2 .

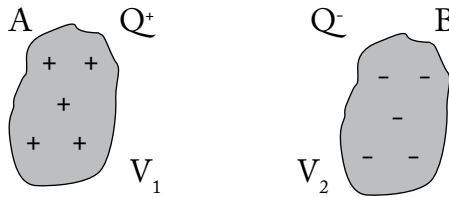


Figura 5.1. El condensador

5.2 Capacitancia o capacidad

La capacitancia o capacidad de un condensador se define como la razón de la carga Q de cualquiera de los conductores, dividida para la diferencia de potencial V_{12} existente entre ellos (figura 5.1). La capacidad es función de la geometría del conductor. La fórmula viene dada por la ecuación (5-1).

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{Q}{\Delta V} \quad (5-1)$$

La unidad de la capacitancia viene expresada en faradios (F). Como esta cantidad es grande, se utilizan los submúltiplos; esto es:

$$\begin{aligned}\text{Microfaradio } (\mu\text{F}) &= 10^{-6} \text{ F} \\ \text{Nanofaradio } (\text{nF}) &= 10^{-9} \text{ F} \\ \text{Picofaradio } (\text{pF}) &= 10^{-12} \text{ F}\end{aligned}$$

5.2.1 Capacidad del condensador de placas planas

En la figura 5.2, considerar cómo dos placas paralelas e infinitas, debido a que $L \gg d$, entonces las líneas de campo eléctrico son paralelas.

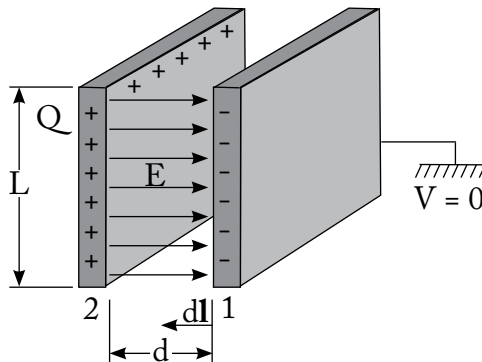


Figura 5.2. Condensador de placas planas

Con los datos siguientes, procedemos a calcular la capacidad del condensador:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad \sigma = \frac{Q}{A}$$

$$V = -\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_1^2 E \, dl \cos 180^\circ = -\int_1^2 E \, dl (-1)$$

$$V = \int_1^2 E \, dl = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} \, dl = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^d dl = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[l \right]_0^d$$

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad ; \quad V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

Donde A = área de la placa.

$$C = \frac{Q}{\frac{Qd}{\epsilon_0 A}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad [F]$$

5.2.2 Capacidad de un condensador esférico

En la figura 5.1, se muestra un condensador formado por dos esferas conductoras concéntricas de radios a y b . La esfera de radio a tiene una distribución superficial uniforme de cargas totales positivas Q^+ , estas generan líneas de campo eléctrico en forma radial; al atravesar por la esfera de radio b (de espesor muy pequeño), se produce la inducción de cargas, donde las cargas negativas Q^- se van a la superficie interior y las cargas positivas Q^+ se van a la superficie exterior, como esta se encuentra aterrizada, entonces las cargas positivas se van a tierra.

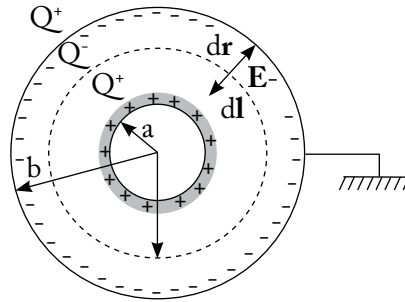


Figura 5.3. Condensador de dos esferas concéntricas de radios a y b

Para calcular la capacidad de este condensador, en primer lugar, debemos calcular el campo eléctrico para un radio $a < r < b$, utilizando la ley de Gauss; este valor es:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

En segundo y tercer lugar, procedemos a calcular la diferencia de potencial entre las dos esferas y, finalmente, reemplazamos en la ecuación (5-1). La diferencia de potencial entre las dos esferas = V,

$$V = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_b^a E \, dr = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \, dr = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2}$$

$$V = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_b^a = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{b - a}{a b}$$

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} \right)} = \frac{4\pi \epsilon_0 ab}{b-a}$$

$$C = \frac{4\pi \epsilon_0 ab}{b-a} \quad [F]$$

5.2.3 Capacidades entre cilindros coaxiales

Para que las líneas de campo eléctrico salgan en forma radial y paralelas, la longitud L debe ser mucho mayor que el radio b , esto es, $L \gg b$ (figura 5.4).

Tomamos una superficie gaussiana de radio r (figura 5.4) y procedemos a calcular el campo eléctrico.

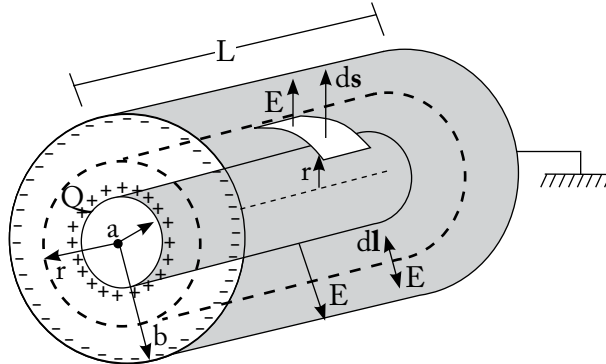


Figura 5.4. Condensador formado entre dos cilindros concéntricos de radios a y b .

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$\int_0^r E ds \cos 0^\circ = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(S) \Big|_0^r = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(2\pi r L) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r L}$$

$$\Delta V = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_b^a E dl \cos 180^\circ = \int_b^a E dl$$

$$dl = - dr \quad \Delta V = V$$

$$V = - \int_b^a E dr$$

$$V = - \int_b^a \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L r} dr = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \int_b^a \frac{dr}{r}$$

$$V = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} [\ln r]_b^a$$

$$V = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} (\ln a - \ln b)$$

$$V = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{a}{b}$$

$$V = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{b}{a}} \text{ Faradios}$$

5.3 Asociación de condensadores: serie, paralelo, $\Delta \rightarrow Y$

Los condensadores o capacitares se pueden conectar de tres formas: en serie, en paralelo y ni en serie ni en paralelo. En la figura 5.5, se muestran los símbolos de los capacitares y el de la diferencia de potencial.

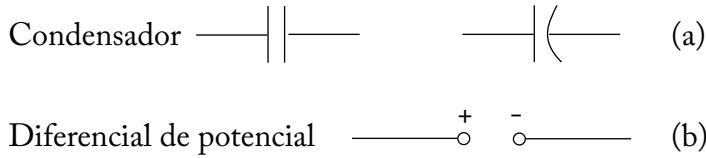


Figura 5.5. (a) Símbolos del condensador y (b) diferencia de potencial

Configuración de condensadores en paralelo.- Los condensadores se encuentran conectados en paralelo cuando los potenciales son iguales.

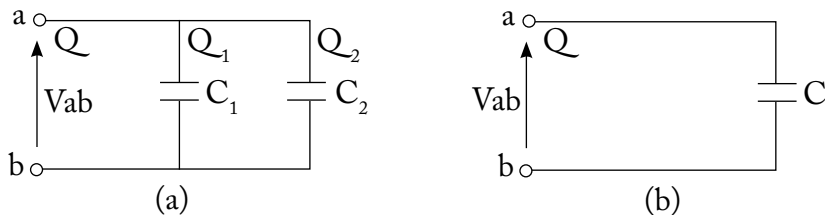


Figura 5.6. (a) Condensadores conectados en paralelo y (b) circuito equivalente de los condensadores conectados en paralelo

En la figura 5.6 (a), los condensadores C_1 y C_2 están conectados en paralelo; entonces, los voltajes son iguales a V_{ab} . La carga total Q es igual a la suma de las cargas Q_1 y Q_2 ; esto es:

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (5-2)$$

Utilizando la ecuación (5-1), calculamos los valores de las cargas Q_1 y Q_2 :

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_{ab}} \quad \rightarrow \quad Q_1 = C_1 V_{ab}$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_{ab}} \quad \rightarrow \quad Q_2 = C_2 V_{ab}$$

Reemplazando los valores en la ecuación (5-2), tenemos:

$$Q = C_1 V_{ab} + C_2 V_{ab}$$

$$Q = V_{ab} (C_1 + C_2)$$

$$\frac{Q}{V_{ab}} = C_1 + C_2 \quad (5-3)$$

En la figura 5.6 (b), calculamos la capacitancia equivalente C ; esto es:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \quad (5-4)$$

Las ecuaciones (5-3) = (5-4); entonces, $C = C_1 + C_2$. Si conectamos en paralelo n capacitores,

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (5-5)$$

Conclusión: cuando los condensadores se encuentran conectados en paralelo, las capacitancias se suman: ecuación (5-5).

Configuración de condensadores en serie.- Los condensadores se encuentran conectados en serie cuando las cargas son iguales.

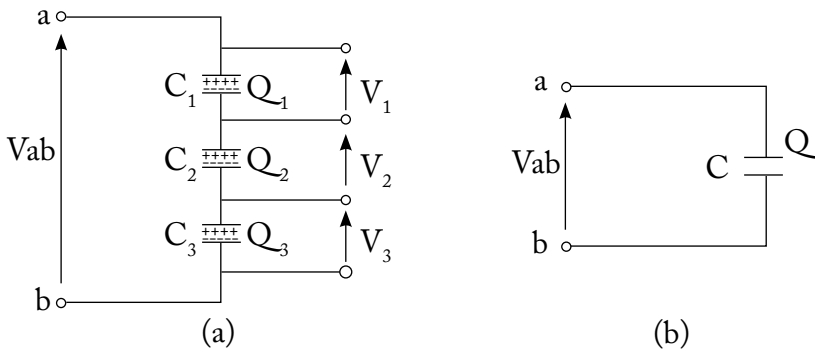


Figura 5.7. (a) Condensadores conectados en serie, (b) circuito equivalente de los condensadores en serie

En la figura 5.7 (a), los condensadores están conectados en serie. Entonces las cargas son iguales; esto es: $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$, y el voltaje V_{ab} es igual a:

$$V_{ab} = V_1 + V_2 + V_3 \quad (5-6)$$

Utilizando la ecuación (5-1), calculamos los valores de los voltajes V_1 , V_2 , y V_3 :

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{Q_1}{C_1}$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{V_2} \quad \rightarrow \quad V_2 = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$C_3 = \frac{Q_3}{V_3} \quad \rightarrow \quad V_3 = \frac{Q_3}{C_3}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (5-6), tenemos:

$$V_{ab} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

$$\frac{V_{ab}}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (5-7)$$

En la figura 5.7 (b), el capacitor equivalente C es:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \quad \rightarrow \quad \frac{V_{ab}}{Q} = \frac{1}{C}, \quad \text{siendo esto igual a (5-7); entonces:}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Si conectamos n capacitores en serie, entonces:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (5-8)$$

Conclusión: cuando los condensadores se encuentran conectados en serie, la capacitancia equivalente es igual al inverso de la suma de los inversos parciales, como se muestra en la ecuación (5-8).

Configuración de condensadores que no están ni en serie ni en paralelo.- Cuando tenemos una configuración de condensadores que no se encuentran conectados ni en serie ni en paralelo, es imposible reducir a un solo capacitor equivalente, razón por la cual se procede a realizar una *transformación delta a estrella* ($\Delta \rightarrow Y$). La figura 5.8 (a) muestra tres capacitores C_1 , C_2 y C_3 conectados en Δ . Se procede a reemplazar por una conexión en Y formado por los capacitores C_a , C_b y C_c ; entonces, tenemos un circuito equivalente (figura 5.8 (b)). En esta nueva configuración, los capacitores ya se encuentran conectados en serie y en paralelo, por lo que podemos reducir a un solo capacitor equivalente.

Para obtener los valores de los capacitores, cuando existe una transformación $\Delta \rightarrow Y$, se utilizan las fórmulas que se encuentran a continuación:

$$C_a = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_2}$$

$$C_b = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_3}$$

$$C_c = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3}{C_1}$$

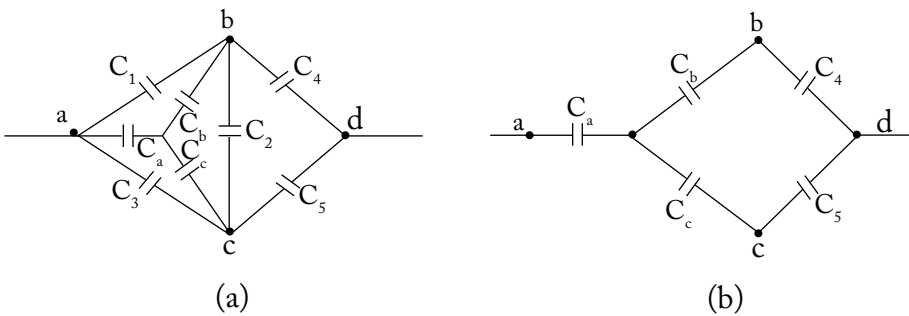


Figura 5.8. Transformación de condensadores de Δ a Y, (a) circuito principal y (b) circuito equivalente

5.4 Energía almacenada en los condensadores

La figura 5.9 muestra un condensador esférico, formado por una esfera conductora de radio R el cual tiene una distribución superficial de cargas uniformes positivas y un potencial V y, la otra esfera concéntrica con cargas negativas y potencial V_0 que se encuentra en el infinito cuyo valor es de cero voltios. Para calcular la energía almacenada en este condensador, procedemos de la siguiente manera:

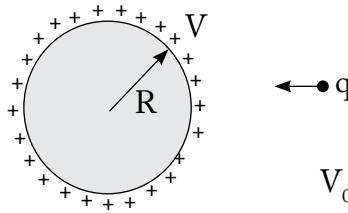


Figura 5.9. Condensador formado por un conductor esférico.

$$dW = dU = V dq$$

$$U = \int dU = \int V dq$$

Siendo U la energía total que va a quedar almacenada en el condensador (figura 5.9):

$$C = \frac{q}{V} \quad \rightarrow \quad q = CV$$

Tomando un diferencial de carga (dq), tenemos:

$$dq = C dV$$

$$U = \int_{V_0}^V VCdV = C \int_{V_0}^V V dV = C \left(\frac{V^2}{2} \Big|_{V_0}^V \right) = \frac{C}{2} (V^2 - V_0^2)$$

Haciendo el voltaje inicial $V_0 = 0$, tenemos:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \quad \text{Joule}$$

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{Joule} \quad (5-9)$$

5.4.1 Energía que almacena un condensador de placas paralelas en su campo eléctrico

En la figura 5.10, realizamos el siguiente procedimiento: primero, calculamos el campo eléctrico con la ley de Gauss; luego, calculamos el potencial eléctrico; posteriormente, calculamos la capacitancia y, finalmente, la energía.

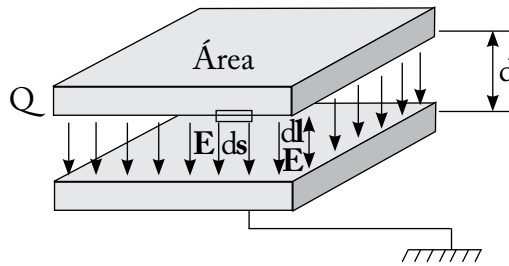


Figura 5.10. Capacitor con placas conductoras paralelas

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}$$

$$\int E ds \cos 0^\circ = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$ES = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{S\epsilon_0}, \quad S = A = \text{área}, \quad \sigma = \frac{Q}{A} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Sabemos que la diferencia de potencial de las placas paralelas es ΔV :

$$\Delta V = -\int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^d E dl \cos 180^\circ = \int_0^d E dl = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dl = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Big|_0^d = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma A}{\sigma d/\epsilon_0} = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

Reemplazando los valores en la ecuación (5-9), la energía almacenada en el condensador de placas paralelas es:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 A^2 d}{A\epsilon_0} = \frac{\sigma^2 Ad}{2\epsilon_0}, \quad Ad = \text{volumen del condensador}$$

$$U = \frac{\sigma^2 Ad}{2\epsilon_0}$$

5.5 Dieléctricos

En un material dieléctrico, no puede haber movimiento de cargas. Se caracteriza por tener muy pocos electrones libres, por ejemplo: mica, caucho, aceite, etc.

5.6 Influencia del dieléctrico en un condensador

Considerando la figura 5.11, demostraremos la influencia del dieléctrico en un condensador de placas paralelas. Las placas conductoras tienen distribuciones de cargas uniformes Q . En el vacío, generan un campo eléctrico E_0 ; posteriormente, entre las placas, se introduce un material dieléctrico que genera un campo E_i . Debido a las cargas q (asumimos que el dieléctrico tiene una pequeña capacidad de conducción), se produce la inducción de cargas. Debido a este dieléctrico, el campo total E disminuye. Esto es,

$$E = E_0 - E_i$$

E_0 = campo eléctrico en el vacío

E_i = campo eléctrico debido a las cargas superficiales inducidas

E = campo eléctrico resultante (total)

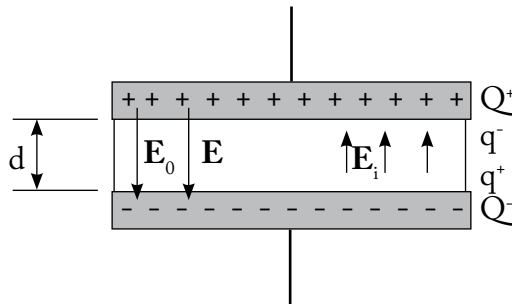


Figura 5.11. Capacitor de placas paralelas con dieléctrico

Sabemos que:

$$V_0 = E_0 d \quad \text{voltaje en el vacío}$$

$$V = Ed \quad \text{voltaje total}$$

Haciendo la relación del potencial en el vacío con respecto al potencial total con el dieléctrico, tenemos:

$$\frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E} = K \quad \rightarrow \quad V = \frac{V_0}{K}, \quad E = \frac{E_0}{K}$$

Siendo K = constante dieléctrica.

De acuerdo con Resnick y Halliday (1977, p. 929), la constante dieléctrica K es función únicamente del material; no depende del campo externo ni del potencial del condensador, es una característica de los aislantes. A continuación, citaremos ejemplos de la constante dieléctrica K para algunos materiales:

Material	Constante eléctrica
Vacío	1.00000
Aire	1.00054
Agua	78
Papel	3.5

En el instante que colocamos el dieléctrico dentro del capacitor, la carga Q se mantiene constante, es decir, no varía su valor, mientras que el potencial sí disminuye. Reemplazando valores, tenemos:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{V_0}{K}} = K \frac{Q}{V_0} = K C_0$$

$$C = KC_0$$

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E} = \frac{C}{C_0}$$

5.7 Ley de Gauss en condensadores con dieléctricos

Para demostrar la ley de Gauss en condensadores con dieléctrico, utilizamos el condensador con placas paralelas (figura 5.12). Calculamos E con el dieléctrico.

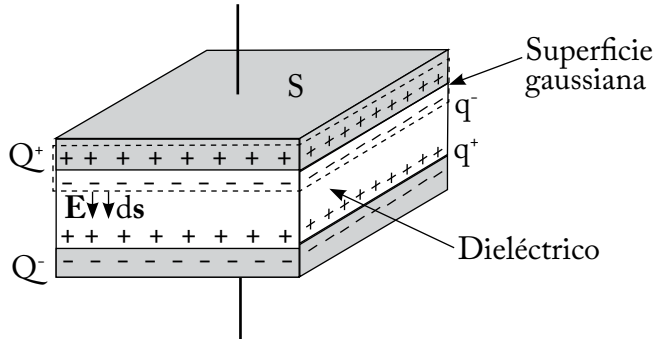


Figura 5.12. Condensador de placas paralelas con material dieléctrico

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_n$$

$$Q_n = Q - q$$

$$\int E ds \cos 0^\circ = \frac{1}{\epsilon_0} (Q - q)$$

$$ES = \frac{1}{\epsilon_0} (Q - q)$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0 S} (Q - q) \quad (5-10)$$

Sabemos que el campo eléctrico sin dieléctrico es:

$$E_0 = \frac{Q}{S\epsilon_0} \quad (5-11)$$

Pero, $E = \frac{E_0}{K} \rightarrow E_0 = KE$, reemplazando en (5-11):

$$KE = \frac{Q}{S\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{S\epsilon_0 K} \quad (5-12)$$

La ecuación (5-10) es igual a (5-12).

$$\frac{1}{\epsilon_0 S} (Q - q) = \frac{Q}{S\epsilon_0 K}$$

$Q - q = \frac{Q}{K} \rightarrow Q_n = Q - q = \frac{Q}{K}$, reemplazando en la ecuación de Gauss:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{K\epsilon_0}$$

En el capacitor de placas paralelas, Q representa la carga neta Q_n , entonces, la ecuación (5-13) representa la ley generalizada de Gauss.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{K\epsilon_0} \quad (5-13)$$

5.8 Energía almacenada en un medio dieléctrico

Considerando la figura 5.12, procedemos a calcular la energía almacenada en el condensador, en forma similar a los condensadores sin dieléctrico.

Sabemos que,

$$U = \frac{1}{2} CV^2, \quad C = KC_0, \quad C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} \rightarrow C = K \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Reemplazando en U, tenemos la energía almacenada en un condensador con dieléctrico.

$$U = \frac{1}{2} K \frac{\epsilon_0 S}{d} V^2 = \frac{K \epsilon_0 S V^2}{2d}$$

$$U = \frac{K \epsilon_0 S V^2}{2d}$$

5.9 Ejercicios de aplicación (problemas resueltos del capítulo 5)

Problemas 5.1. Calcular la capacidad de un conductor esférico que tenga distribuida una carga Q en su superficie (ver figura 5.13).

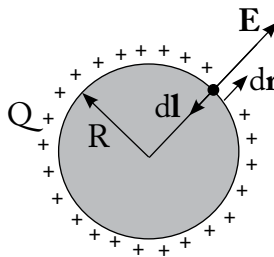


Figura 5.13. Capacitancia en un condensador esférico

Solución:

En la figura 5.13, sabemos que el campo eléctrico producido por una carga Q , la cual se encuentra distribuida en una superficie esférica a una distancia r , es:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Utilizando la ecuación del potencial eléctrico, tenemos:

$$V = - \int_{\infty}^p \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^p E dl \cos 180^\circ = \int_{\infty}^p E dl$$

$$dl = - dr$$

$$V = - \int_{\infty}^p E dr = - \int_{\infty}^p \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}, \text{ el punto } p \text{ se encuentra a un radio } R$$

$$V = - \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

$$V = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty} \right]$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

La capacitancia C es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}} = 4\pi \epsilon_0 R \quad \rightarrow \quad C = 4\pi \epsilon_0 R$$

Problema 5.2. Calcular el voltaje y la carga de cada condensador, sabiendo que: $V_{ab} = 100$ vol, $C_1 = 3 \mu\text{F}$, $C_2 = 1 \mu\text{F}$, $C_3 = 4 \mu\text{F}$ y $C_4 = 3 \mu\text{F}$ (ver figura 5.14 (a)).

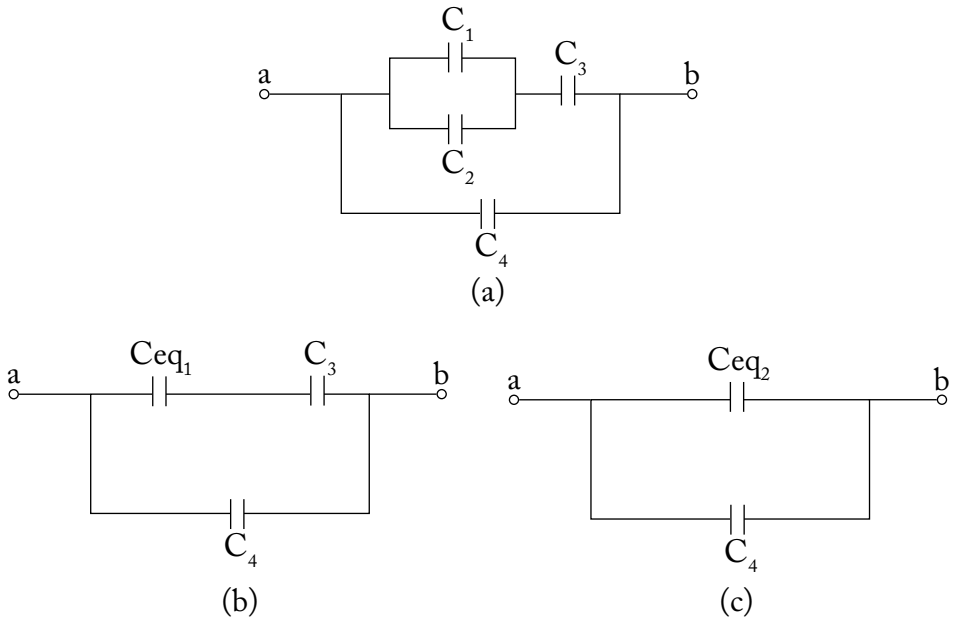


Figura 5.14. Circuitos capacitivos (a), (b) y (c)

Solución:

$$V_4 = V_{ab} = 100\text{V}$$

$$C_4 = \frac{Q_4}{V_4} \Rightarrow Q_4 = C_4 V_4 = (3 \mu\text{F})(100) = 300 \mu\text{Coul}$$

$$Q_4 = 300 \text{ } \mu\text{coul}$$

$$V_4 = 100 \text{ vol}$$

En la figura 1.14b:

$$C_{eq1} = C_1 + C_2$$

$$C_{eq1} = 3 + 1 = 4 \text{ } \mu\text{f}$$

En la figura 1.14c:

$$\frac{1}{C_{eq2}} = \frac{1}{C_{eq1}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.25 + 0.25$$

$$\frac{1}{C_{eq2}} = 0.5$$

$$C_{eq2} = 2 \text{ } \mu\text{f}$$

$$C_{eq2} = \frac{Q_{eq2}}{V_{ab}} \Rightarrow Q_{eq2} = C_{eq2} V_{ab} = (2)(100) = 200 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_{eq2} = 200 \text{ } \mu\text{coul} \quad \rightarrow \quad Q_{eq2} = Q_{eq1} = Q_3$$

Cuando los capacitores están en serie, las cargas son iguales.

$$Q_3 = C_3 V_3 \quad \rightarrow \quad V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{200}{4} = 50$$

$$V_3 = 50 \text{ vol}$$

$$Q_3 = 200 \text{ } \mu\text{coul}$$

$$V_{eq1} = \frac{Q_{eq1}}{C_{eq1}} = \frac{200}{4} = 50 \text{ V}$$

$$V_{eq1} = 50 \text{ V}$$

$$V_{eq1} = V_1 = V_2 = 50 \text{ V}$$

$$Q_1 = C_1 V_1 = (3 \mu\text{F})(50) = 150 \mu \text{ Coul}$$

$$Q_2 = C_2 V_2 = (1 \mu\text{F})(50) = 50 \mu \text{ Coul}$$

Problema 5.3. Determinar la capacitancia de un condensador, que tiene una distribución superficial de cargas Q y posee dos láminas dieléctricas diferentes, de constantes K_1 y K_2 y espesores a y b , respectivamente (figura 5.15).

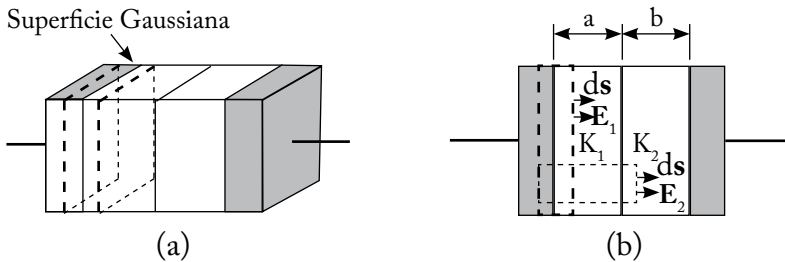


Figura 5.15. Condensadores con dieléctricos

Solución:

En la figura 5.15 (b):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_n}{K \epsilon_0}$$

$$\int E_1 ds \cos 0^\circ = \frac{Q}{K_1 \epsilon_0} \rightarrow E_1 = \frac{Q}{K_1 \epsilon_0 S}$$

$$\int E_2 ds \cos 0^\circ = \frac{Q}{K_2 \epsilon_0} \rightarrow E_2 = \frac{Q}{K_2 \epsilon_0 S}$$

$$V = V_1 + V_2, \quad V_1 = E_1 a, \quad V_2 = E_2 b$$

$$V = E_1 a + E_2 b$$

$$V = \frac{Qa}{K_1 \epsilon_0 S} + \frac{Qb}{K_2 \epsilon_0 S}$$

$$V = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \left(\frac{a}{K_1} + \frac{b}{K_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{\epsilon_0 S} \left(\frac{a}{K_1} + \frac{b}{K_2} \right)} = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{a}{K_1} + \frac{b}{K_2}}$$

Problema 5.4. Dado el circuito de la figura 5.16, con los datos que se muestran a continuación: $V_{AB} = 100$ vol, $C_1 = 2\mu\text{f}$, $C_2 = 1\mu\text{f}$, $C_3 = 2\mu\text{f}$, $C_4 = 5\mu\text{f}$, $C_5 = 3\mu\text{f}$, $C_6 = 6\mu\text{f}$, $C_7 = 1\mu\text{f}$ y $C_8 = 2\mu\text{f}$. Hallar la carga y el voltaje de cada una de los capacitores.

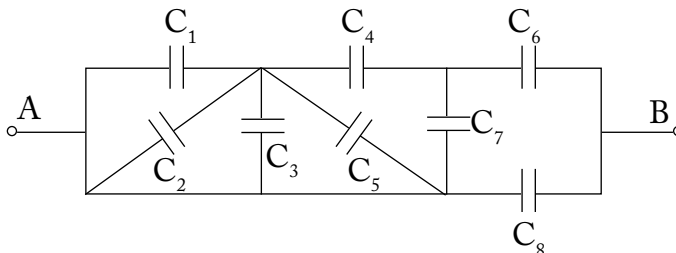


Figura 5.16. Capacitores conectados en serie y en paralelo.

Solución:

En la figura 5.16, organizamos de una mejor forma, entonces, tenemos la figura 5.17. Los capacitores C_1 , C_2 , C_3 , y C_5 se encuentran conectados en paralelo, lo que da como resultado una capacitancia equivalente C_{eq1} , tal como se muestra en la figura 5.18.

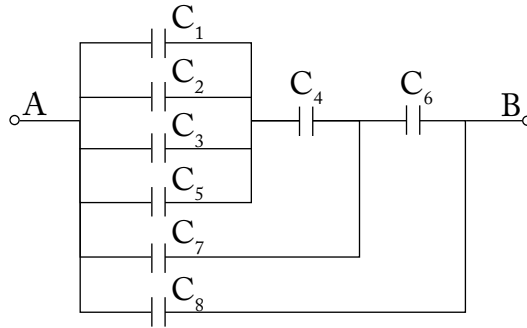


Figura 5.17. Reubicación de (a)

$$C_{eq1} = C_1 + C_2 + C_3 + C_5$$

$$C_{eq1} = 2 + 1 + 2 + 3 = 8\mu f$$

$$C_{eq1} = 8\mu f$$

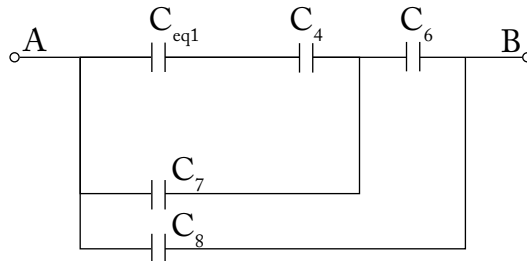


Figura 5.18. C_{eq1} de conexiones de capacitores en paralelo

En la figura 5.18, los capacitores C_{eq1} y C_4 están conectados en serie, lo que da como resultado C_{eq2} , tal como se muestra en la figura 5.19.

$$\frac{1}{C_{eq2}} = \frac{1}{C_{eq1}} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{5} = 0.325$$

$$C_{eq2} = \frac{1}{0.325} = 3.08 \mu\text{f}$$

$$C_{eq2} = 3.08 \mu\text{f}$$

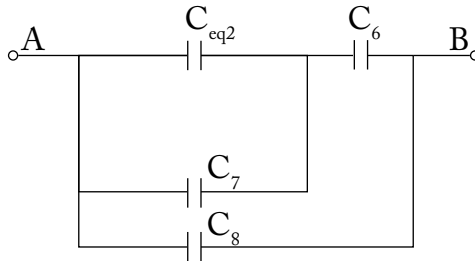


Figura 5.19. C_{eq2} de conexiones en serie

En la figura 5.19, los capacitores C_{eq2} y C_7 están conectados en paralelo, lo que da como resultado C_{eq3} , tal como se muestra en la figura 5.20.

$$C_{eq3} = C_{eq2} + C_7 = 3.08 + 1 = 4.08 \mu\text{f}$$

$$C_{eq3} = 4.08 \mu\text{f}$$

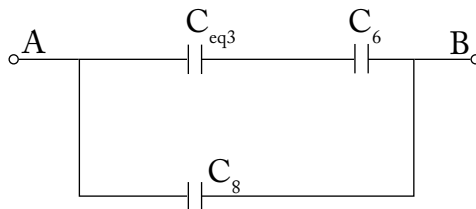


Figura 5.20. C_{eq3} de conexiones en paralelo

En la figura 5.20, los capacitores C_{eq3} y C_6 están en serie, lo que da como resultado C_{eq4} , tal como se muestra en la figura 5.21.

$$\frac{1}{C_{eq4}} = \frac{1}{C_{eq3}} + \frac{1}{C_6} = \frac{1}{4.08} + \frac{1}{6} = 0.2451 + 0.1667 = 0.4118$$

$$\frac{1}{C_{eq4}} = 0.4118$$

$$\frac{1}{C_{eq4}} = 0.4118 \quad \Rightarrow \quad C_{eq4} = \frac{1}{0.4118} = 2.428 \mu\text{f}$$

$$C_{eq4} = 2.43 \mu\text{f}$$

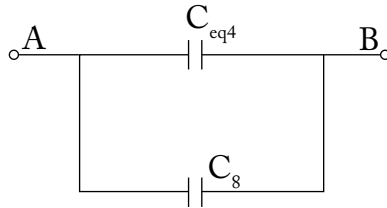


Figura 5.21. C_{eq4} de conexiones en serie

En la figura 5.21, los capacitores C_{eq4} y C_8 están conectados en paralelo, lo que da como resultado C_{eq5} , tal como se muestra en la figura 5.22.

$$C_{eq5} = C_{eq4} + C_8 = 2.43 + 2 = 4.43 \mu\text{f}$$

$$C_{eq5} = 4.43 \mu\text{f}$$

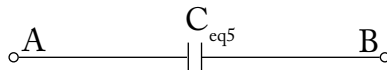


Figura 5.22. C_{eq5} de conexiones en paralelo

El potencial entre los puntos A y B es $V_{AB} = 100$ vol; entonces, el voltaje en el capacitor C_{eq5} es de 100 vol (figura 5.22). Así, el voltaje en el capacitor C_{eq4} y C_8 (figura 5.21) es de 100 vol, ya que se encuentran conectados en paralelo.

$$V_8 = 100 \text{ V} \qquad V_{eq4} = 100 \text{ V}$$

$$C_8 = \frac{Q_8}{V_8}$$

$$Q_8 = C_8 V_8 = (2)(100) = 200 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_8 = 200 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_{eq4} = C_{eq4} V_{eq4} = (2.43)(100) = 243 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_{eq4} = 243 \text{ } \mu\text{Coul}$$

Los capacitores C_{eq3} y C_6 están en serie (figura 5.20). Las cargas son iguales en una conexión en serie por tanto:

$$Q_{eq4} = Q_{eq3} = Q_6 = 243 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_6 = 243 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$C_6 = \frac{Q_6}{V_6} \Rightarrow V_6 = \frac{Q_6}{C_6} = \frac{243}{6} = 40.50 \text{ V}$$

$$V_6 = 40.50 \text{ V}$$

$$V_{eq3} = \frac{Q_{eq3}}{C_{eq3}} = \frac{243 \times 10^{-6}}{4.08 \times 10^{-6}} = 59.56 \text{ V}$$

$$V_{eq3} = 59.56 \text{ V}$$

Las capacitancias C_{eq2} y C_7 están en paralelo (figura 5.19). Entonces, el $C_{eq3} = C_{eq2} + C_7$ es el resultado de las dos capacitancias en paralelo; por lo tanto, en una conexión en paralelo, los voltajes son iguales. Esto es:

$$V_{eq3} = V_{eq2} = V_7 = 59.56 \text{ V}$$

Con el voltaje del capacitor 7, calculamos la carga 7. Esto es:

$$Q_7 = C_7 V_7 = (1 \times 10^{-6})(59.56) = 59.56 \times 10^{-6} \text{ Coul}$$

$$Q_7 = 59.56 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$V_7 = 59.56 \text{ V}$$

$$Q_{eq2} = (C_{eq2})(V_{eq2}) = (3.08)(59.56) = 183.44 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_{eq2} = 183.44 \text{ } \mu\text{Coul}$$

Los capacitores C_{eq1} y C_4 están en serie (figura 5.18). Entonces, C_{eq2} es el resultado de estos capacitores en serie; por tanto, en una conexión en serie. Esto es:

$$Q_{eq2} = Q_{eq1} = Q_4 = 183.44 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{183.44}{5} = 36.69 \text{ V}$$

$$V_4 = 36.69 \text{ V}$$

$$Q_4 = 183.44 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$V_{eq1} = \frac{Q_{eq1}}{C_{eq1}} = \frac{183.44}{8} = 22.93 \text{ V}$$

$$V_{eq1} = 22.93 \text{ V}$$

El C_{eq1} es el resultado de los capacitores C_1 , C_2 , C_3 , y C_5 , conectados en paralelo. Entonces, los voltajes son iguales en una conexión en paralelo, esto es:

$$V_{eq1} = V_1 = V_2 = V_3 = V_5 = 22.93 \text{ V}$$

$$Q_1 = C_1 V_1 = (2)(22.93) = 45.86 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_1 = 45.86 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_2 = C_2 V_2 = (1)(22.93) = 22.93 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_2 = 22.93 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_3 = C_3 V_3 = (2)(22.93) = 45.86 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_3 = 45.86 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_5 = C_5 V_5 = (3)(22.93) = 68.79 \text{ } \mu\text{Coul}$$

$$Q_5 = 68.79 \text{ } \mu\text{Coul}$$

En la tabla 5.1 se encuentra resumida los resultados de los cálculos de la capacitancia, carga y potencial de cada uno de los capacitores.

Número de capacitador C	Capacitancia del capacitor C (μf)	Carga Q del capacitador (μCoul)	Voltaje V del capacitor (Voltios)
C_1	2	45.86	22.93
C_2	1	22.93	22.93
C_3	2	45.86	22.93
C_4	5	183.44	36.69
C_5	3	68.79	22.93
C_6	6	243	40.50
C_7	1	59.56	59.56
C_8	2	200	100
C_{eq1}	8	183.44	22.93
C_{eq2}	3.08	183.44	59.56
C_{eq3}	4.08	243	59.56
C_{eq4}	2.43	243	100
C_{eq5}	4.43		100

Tabla 5.1. Resultados de la carga y el voltaje de cada uno de los capacitores del problema 5.4.

Electromagnetismo básico e introducción a los circuitos eléctricos se publica con el único propósito de ayudar a los estudiantes en el aprendizaje de los campos electromagnéticos y circuitos eléctricos.

La obra está destinada a aquellos estudiantes de ciencia e ingeniería que tienen conocimientos de cálculo diferencial e integral, y de álgebra vectorial. La parte teórica presenta los principales aspectos en los que se basa el electromagnetismo, para luego poder aplicarlos en el desarrollo de problemas, siendo así una herramienta de trabajo de fácil entendimiento para el estudiante.

A lo largo de todo el libro, se concede atención a las leyes de: Coulomb, Gauss, Ohm, Kirchhoff, Ampere, Biot-Savart y Lenz. Estas leyes son fundamentales para el aprendizaje, de tal forma que se las puede emplear en el estudio de los circuitos eléctricos y magnéticos.

Pedro Infante Moreira nació en Quinsaloma, provincia de Los Ríos, en 1959. Es ingeniero electrónico, graduado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral, y tiene un Diplomado Superior en Pedagogía Universitaria, Maestrías en Gestión Académica Universitaria y Administración de Empresas. Actualmente es candidato a un Doctorado en Ciencias Técnicas. Tiene 22 años en la docencia, en la Universidad Técnica de Babahoyo, la Universidad Nacional de Chimborazo y en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Ha publicado varios textos básicos, solucionarios y un libro.

ISBN: 978-9942-14-228-3



9 789942 142283

